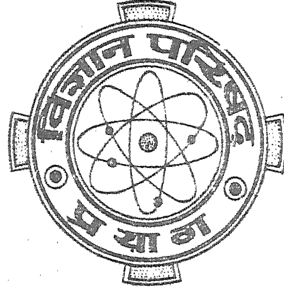
ISSN : 0505 - 5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 42 January 1999 No. 1



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

विषय-सूची

Vol. 42 January 1999 No. 1

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 1, January, 1999.

कुछ बहुचरीय हाइपरज्यामितीय फलनों के भिन्नात्मक अवकलज

एच० एस० पी० श्रीवास्तव

गणित विभाग, शासकीय कला एवं विज्ञान महाविद्यालय, रतलाम, म० प्र०

[प्राप्त - 1 जून 1998]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में कई मुख्य सूत्र बहुचरीय H-फलन के भिन्नात्मक ज्ञात किये गये हैं। इनमें से प्रत्येक मुख्य रूप से कई रुचिकर विभिन्न बहुचरीय हाइपरज्यामितीय फलन के नए सूत्र ज्ञात किये जा सकते हैं। इन मुख्य सूत्रों के प्रयोग के द्वारा भिन्नात्मक कलन के कई ज्ञात एवं अज्ञात सूत्रों का व्यापकीकरण निकाला जा सकता है।

Abstract

Some fractional derivatives of generalized hypergeometric function of several variables. *By* H. S. P. Shrivastava, Department of Mathematics, Govt. Arts and Science College, Ratlam (M. P.)

In the present paper we derive a number of key formulae involving fractional derivatives of multivariable H-function, which was introduced and studied in a series of papers of H. M. Shrivastava and R. Panda. Each of these formulae can be shown to yield interesting new results for various classes of generalized hypergeometric functions of several variables. Application of some of these key results provide potentially useful generalization of known results in the theory of fractional calculus.

1. प्रस्तावना

सेगो[4] ने रीमन-लियोविले एवं अर्दली-कोबर द्वारा प्रचारित भिन्नात्मक समाकलन संकारक का

रुचिकर व्यापकीकरण किया एवं उनके बहुत से गुणधर्मों को सममित रूप से ज्ञात किया। उन्होंने भिन्नात्मक समाकलन संकारक में गॉसियन हाइपरज्यामितीय फलन को शामिल किया और[5-9] ऑयलर-डारबाक्स समीकरण से संबंधित परिसीमा मान समस्या के अध्ययन के लिए भिन्नात्मक समाकलन संकारक की परिभाषा को विस्तारित भी किया जो निम्न प्रकार[4] है

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} f(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha+\beta, -\eta \\ \\ \alpha\end{matrix}; 1-\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt, \qquad (1.1)$$

जहाँ पर $\alpha > 0$, β, η बास्तविक संख्या है, $f(x)$, $(0, \infty)$ में परिभाषित एक वास्तविक मान एवं सतत फलन है जिसकी कोटि $x = 0$ के नजदीक $O(x^k)$ है। साथ ही $k > \max(0, \beta - \eta) - 1$.

जब $\alpha < 0$, $n \rightarrow$ धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार कि $0 < \alpha + n \leq 1$, सेगो ने परिभाषित किया।

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_{0,x}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f(x), \qquad (1.2)$$

बशर्ते RHS अर्थहीन न हो।

श्रीवास्तव तथा पंडा [13, p. 271 (4.1) et. seq] ने बहुचरीय H-फलन को प्रचारित किया एवं उसके बहुत से गुणधर्मों का सममितीय अध्ययन अपने अनेक शोधपत्रों[10 - 17] द्वारा किया। हमने उनके द्वारा दिये गये संक्षिप्त संकेतनों तथा विविध परिकल्पनाओं को ग्रहण किया है।

माना

$$H\left[z_1, \ldots, z_r\right] = H_{p,q:p_1,q_1;\ldots;p_r,q_r}^{0,n:m_1 n_1;\ldots;m_r n_r}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(a_j; \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} : \left(c_j^1, \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_1}; \ldots; \left(c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \\ \left(b_j; \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q} : \left(d_j^1, \delta_j^1\right)_{1,q_1}; \ldots; \left(d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r} \end{matrix}\right] \qquad (1.3)$$

r समिश्र चरों $z_1, \ldots\ldots, z_r$ वाले H-फलन को निरूपित करता है। सुविधा के लिए $(a_j; \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)})_{1,p}$; p-सदस्यों

$$\left(a_1\,;\,\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^{(r)}\right),\ldots,\left(a_p\,;\,\alpha_p^1,\ldots,\alpha_p^{(r)}\right)$$

को निरूपित करता है जबकि $(c_j^{(i)},\ \gamma_j^{(i)})_{1,p_i}$ निम्न प्राचलों द्वारा निरूपित होता है।

$$\left(c_1^{(i)},\ \gamma_1^{(i)}\right),\ldots,\left(c_{p_i}^{(i)},\ \gamma_{p_i}^{(i)}\right);\ (i\,=\,1,\ldots,r)$$

इसी प्रकार अन्य। प्राचल

$$\begin{cases} a_j,\ j\,=\,1,\ldots,p\,;\ c_j^{(i)},\ j\,=\,1,\ldots,p_i \\ b_j,\ j\,=\,1,\ldots,q\,;\ d_j^{(i)},\ j\,=\,1,\ldots,q_i \end{cases};\ \forall i\ \varepsilon\,\{1,\ldots,r\}, \tag{1.4}$$

संमिश्र संख्यायें हैं और सम्बद्ध गुणांक

$$\begin{cases} \alpha_j,\ j\,=\,1,\ldots,p\,;\ \gamma_j^{(i)},\ j\,=\,1,\ldots,p_i \\ \beta_j,\ j\,=\,1,\ldots,q\,;\ \delta_j^{(i)},\ j\,=\,1,\ldots,q_i \end{cases};\ \forall i\ \varepsilon\,\{1,\ldots,r\}, \tag{1.5}$$

धनात्मक वास्तविक सख्यायें हैं इस प्रकार कि

$$\Lambda_i = \sum_{j=1}^{p}\alpha_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q}\beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{p_i}\gamma_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q_i}\delta_j^{(i)} \le 0\,, \tag{1.6}$$

और

$$\Omega_i = -\sum_{j=n+1}^{p}\alpha_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q}\beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i}\gamma_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i}\gamma_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i}\delta_j^{(i)} - \sum_{j=m_i+1}^{q_i}\delta_j^{(i)} > 0\,, \tag{1.7}$$

जहाँ पर $n, p, q, n_i, m_i, p_i, q_i$ प्रोत्तर पूर्णांक है इस प्रकार कि

$0 \le n \le p,\ q \ge 0,\ 1 \le m_i \le q_i$ और $0 \le n_i \le p_i,\ \forall\ i\ \varepsilon\,\{1,\ldots,r\}$

समीकरण (1.6) संमिश्र चरों $z_1,\ldots,z_r$ के उपयुक्त मानों के लिए सत्य है।

यह विदित है बहुचरीय H-फलन (1.3) को निरूपित करने वाला बहु मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकलन [17, p. 251 (c.1)] परम रूप से अभिसारी होता है यदि प्रतिबन्ध (1.7) सत्य हो, जब

$$\left| \arg\left(z_i \right) \right| < \frac{1}{2} \pi \Omega_i, \ \forall i \ \varepsilon \{1, \ldots, r\} \tag{1.8}$$

बिन्दु $Z_i = 0 \ (i = 1, .., r)$ और अन्य अपवादित प्राचल मानों को अकथित रूप से छोड़ा जाय। आगे भी [12, p. 131(19)]:

$$H\left[z_1, \ldots, z_r \right] = \begin{cases} 0\left(\left| z_1 \right|^{\xi_1} \ldots \left| z_r \right|^{\xi_r} \right), \max\left\{ \left| z_1 \right|, \ldots, \left| z_r \right| \right\} \to 0 \\ 0\left(\left| z_1 \right|^{\eta_1} \ldots \left| z_r \right|^{\eta_r} \right), n = 0, \min\left\{ \left| z_1 \right|, \ldots, \left| z_r \right| \right\} \to 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

जहाँ पर $(i = 1, \ldots r)$

$$\begin{cases} \xi_i = \min\left\{ \operatorname{Re}\left(d_j^{(i)} \right) / \delta_j^{(i)} \right\}, \ j = 1, \ldots, m_i \\ \xi_i = \max\left\{ \operatorname{Re}\left(c_j^{(i)} - 1 \right) / \gamma_j^{(i)} \right\}, \ j = 1, \ldots, n_i \end{cases} \tag{1.10}$$

बशर्ते प्रत्येक असमिका (1.6), (1.7) एवं (1.8) सत्य हो।

आगे बढ़ने से पहले यह बताना उपयुक्त होगा कि इस प्रपत्र में बहुचरीय H-फलन के अभिसरण एवं अस्तित्व प्रतबन्धों के लिये पहले दिये गये संगत प्रतिबन्ध सत्य होंगे।

2. भिन्नात्मक अवकलज सूत्र

हम निम्न बहुचरीय H-फलन वाले भिन्नात्मक अवकलजों को सिद्ध करेंगे :

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}\left\{ x^k \left(x^\upsilon + \xi \right)^\lambda H\left[z_1 x^{\rho_1} \left(x^\upsilon + \xi \right)^{-\sigma_1}, \ldots, z_r x^{\rho_r} \left(x^\upsilon + \xi \right)^{-\sigma_r} \right] \right\}$$

$$= \xi^\lambda x^{k-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x^\upsilon/\xi)^m}{m!} \times H_{p+3, q+3 : p_1, q_1 ; \ldots ; p_r, q_r}^{0, n+3 : m_1, n_1 ; \ldots ; m_r, n_r}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1 x^{\rho_1} \xi^{-\sigma_1} \\ \vdots \\ z_r x^{\rho_r} \xi^{-\sigma_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(1 + \lambda - m; \sigma_1, \ldots, \sigma_r \right), \left(-k - m\upsilon ; \rho_1, \ldots, \rho_r \right), \\ \\ \left(1 + \lambda ; \sigma_1, \ldots, \sigma_r \right), \left(-k + \beta - m\upsilon ; \rho_1, \ldots, \rho_r \right), \end{matrix} \right.$$

$$\times \begin{matrix} \left(-k+\beta-\eta-m\upsilon;\ \rho_1,\ldots,\rho_r\right),\ \left(a_j;\ \alpha_j^1,\ldots,\alpha_j^{(r)}\right)_{1,p}: \\ \left(-k-\alpha-\eta-m\upsilon;\ \rho_1,\ldots,\rho_r\right),\ \left(b_j;\ \beta_j^1,\ldots,\beta_j^{(r)}\right)_{1,q}: \end{matrix}$$

$$\times \left.\begin{matrix} \left(c_j^1;\ \gamma_j^1\right)_{1,p_1};\ldots;\left(c_j^{(r)},\ \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \left(d_j^1,\ \delta_j^1\right)_{1,q_1};\ldots;\left(d_j^{(r)},\ \delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r} \end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

बशर्ते (पूर्व मे दिये अभिसरण एवं अस्तित्व प्रतिबन्धों सहित)

$$\min\left\{\upsilon,\ \rho_i,\ \sigma_i\right\}>0,\ (i=1,\ldots,r);\ \left|\arg\left(x^{\upsilon}/\xi\right)\right|<\pi;$$

$$\operatorname{Re}(k)+\sum_{i=1}^{r}\rho_i\,\xi_i>-1,$$

जहाँ $\xi_1,\ldots,\xi_r$ वही है जो (1.10) में दिये गये हैं।

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}\,I_{0,y}^{\alpha',\beta',\eta'}\left\{x^k y^{k'}\left(x^{\upsilon}+\xi\right)^{\lambda}\left(y^{\upsilon'}+\delta\right)^{\lambda'}\right.$$

$$\times H\Big[z_1 x^{\rho_1} y^{\lambda_1}\left(x^{\upsilon}+\xi\right)^{-\sigma_1}\left(y^{\upsilon'}+\delta\right)^{-\upsilon_1},\ldots,z_r x^{\rho_r} y^{\lambda_r}$$

$$\left.\times\left(x^{\upsilon}+\xi\right)^{-\sigma_r}\left(y^{\upsilon'}+\delta\right)^{-\upsilon_r}\Big]\right\}$$

$$=\xi^{\lambda}\delta^{\lambda'}x^{k-\beta}y^{k'-\beta'}\sum_{l,m=0}^{\infty}\frac{(-x^{\upsilon}/\xi)^l\,(-y^{\upsilon'}/\delta)^m}{l!\ m!}\times$$

$$\times H_{p+6,q+6:p_1,q_1;\ldots;p_r,q_r}^{0,n+6:m_1,n_1;\ldots;m_r,n_r}\times\left[\begin{matrix} z_1 x^{\rho_1} y^{\lambda_1}\xi^{-\sigma_1}\delta^{-\upsilon_1} \\ \vdots \\ z_r x^{\rho_r} y^{\lambda_r}\xi^{-\sigma_r}\delta^{-\upsilon_r} \end{matrix}\right|$$

$$\times\begin{matrix} \left(1+\lambda-l;\ \sigma_1,\ldots,\sigma_r\right),\ \left(1+\lambda'-m;\ \upsilon_1,\ldots,\upsilon_r\right), \\ \left(1+\lambda;\ \sigma_1,\ldots,\sigma_r\right),\ \left(1+\lambda';\ \upsilon_1,\ldots,\upsilon_r\right), \end{matrix}$$

$$\times \begin{array}{l}\left(-k'-m\upsilon';\lambda_1,\ldots,\lambda_r\right),\left(-k'-m\upsilon'+\beta'-\eta';\lambda_1,\ldots,\lambda_r\right),\\ \left(-k'-m\upsilon'+\beta';\lambda_1,\ldots,\lambda_r\right),\left(-k'-m\upsilon'-\alpha'-\eta';\lambda_1,\ldots,\lambda_r\right),\end{array}$$

$$\times \begin{array}{l}\left(-k-l\upsilon;\rho_1,\ldots,\rho_r\right),\left(-k-l\upsilon'+\beta-\eta;\rho_1,\ldots,\rho_r\right),\\ \left(-k-l\upsilon+\beta;\rho_1,\ldots,\rho_r\right),\left(-k-l\upsilon-\alpha-\eta;\rho_1,\ldots,\rho_r\right),\end{array}$$

$$\times \left.\begin{array}{l}\left(a_j;\alpha_j^1,\ldots,\alpha_j^{(r)}\right)_{1,p}:\left(c_j^1;\gamma_j^1\right)_{1,p_1}:\ldots;\left(c_j^{(r)},\gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r}\\ \left(b_j;\beta_j^1,\ldots,\beta_j^{(r)}\right)_{1,q}:\left(d_j^1,\delta_j^1\right)_{1,q_1}:\ldots;\left(d_j^{(r)},\delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r}\end{array}\right] \tag{2.2}$$

बशर्ते (पूर्व में दिये गये अभिसरण एवं अस्तित्व प्रतिबन्धों सहित)

$$\min\left\{\upsilon,\ \upsilon',\ \rho_i,\ \sigma i,\ \lambda i,\ \upsilon_i\right\} > 0,\quad (i = 1,\ldots,r);$$

$$\max\left\{\left|\arg\left(x^{\upsilon}/\xi\right)\right|\left|\arg\left(y^{\upsilon'}/\delta\right)\right|\right\} < \pi;$$

$$\mathrm{Re}\,(k) + \sum_{i=1}^{r}\rho_i\,\xi_i > -1;\ \mathrm{Re}\,(k') + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\,\xi_i > -1;$$

जहाँ $\xi_1,\ldots,\xi_r$ वही हैं जो (1.10) में दिये गये हैं।

(2.1) की उपपत्ति : वाम पक्ष में सर्वप्रथम बहुचरीय H-फलन को उसके बहु मेलिन-बार्नीज कन्टूर समाकलन द्वारा विस्थापित करने, x की घातों को एकत्रित करने और द्विपद प्रसार का उपयोग करने पर,

$$(x+\xi)^{\lambda} = \xi^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\lambda}{m}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{m};\ \left|\frac{x}{\xi}\right| < 1, \tag{2.3}$$

फिर निम्नलिखित सूत्र

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}\left(x^{\lambda}\right) = \frac{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(1+\lambda-\beta+\eta)}{\Gamma(1+\lambda-\beta)\,\Gamma(1+\lambda+\alpha+\eta)};\ \mathrm{Re}\,(\lambda) + 1 - \beta > 0, \tag{2.4}$$

का प्रयोग करने पर और अंत में प्राप्त बहुमेलिन-बार्नीज कन्टूर को बहुचरीय H-फलन में निरूपित करने पर हमें वांछित सूत्र (2.1) प्राप्त होता है।

भिन्नात्मक अवकलज सूत्र (2.4) की सरल एवं सीधी उपपत्ति के लिये, (1.1) में $f(x) = x^{\lambda}$, $t = xy$ रखते हैं, ${}_2F_1$ को श्रेणी रूप में लिखते हैं, समाकलन एवं श्रेणी का अल्प परिवर्तन करते हैं जो दिये प्रतिबंधों में स्वीकार्य है। अंत में बीटा फलन प्रयुक्त करने के बाद, गॉस प्रमेय ${}_2F_1$ [1] का प्रयोग करने पर हमें (2.4) प्राप्त होता है।

(2.2) की उपपत्ति :- सूत्र (2.2) की उपपत्ति सहजता से हो जाती है यदि भिन्नात्मक अवकलज सूत्र (2.1) का प्रयोग दो बार दिया जाय, पहले y के सापेक्ष में और फिर x के सापेक्ष में। यहाँ पर चर x और y स्वतंत्र चर है।

3. अनुप्रयोग

प्रत्येक भिन्नात्मक अवकलज सूत्र (2.1), (2.2) अनेक व्यापकताओं वाला है। इन सूत्रों में शामिल अनेक प्राचलों और चरों का विशेषीकरण करने पर एवं इनका उपयुक्त प्रयोग करके आश्चर्यजनक रूप से अनेक उपयोगी फलनों (या इन फलनों के गुणन) जैसे E, F, G, H-फलनों एक या दो या बहु चरों के फलनों में बहुत सारे संबंधों को प्राप्त किया जा सकता है। सूत्रों के घातांकों का भी विशेषीकरण इस प्रकार करने पर कि प्राप्त समीकरण सत्य हो, अनेक सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं। जैसे यदि $n = p = q = 0$ लें तो सूत्रों में शामिल बहुचरीय सर्वीकृत-H फलन तुरन्त r भिन्न-भिन्न फाक्स के H-फलन में टूट जाता है। फाक्स के H-फलन को कई सरल फलनों में परिवर्तित करने के सूत्रों के लिये मथाई तथा सक्सेना [1, p. 145 - 159] को देखा जा सकता है। इस प्रकार सूत्रों (2.1), (2.2) से अनेक सरल फलनों वाले भिन्नात्मक अवकलज सूत्र ज्ञात किये जा सकते हैं।

(i) (2.1) में $\sigma_i \downarrow 0, \forall\, i \in \{1, \ldots, r\}$ लेने पर हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है :

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}\left\{x^k\left(x^v+\xi\right)^{\lambda} H\left[z_1 x^{\rho_1},\ldots,z_r x^{\rho_r}\right]\right\}$$

$$= \xi^{\lambda} x^{k-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\lambda}{m} \left(-x^v/\xi\right)^m$$

$$\times H^{0,\,n+2\,:\,m_1,n_1;\ldots;m_r,n_r}_{p+2,\,q+2\,:\,p_1,q_1;\ldots;p_r,q_r}\left[\begin{matrix} z_1 x^{\rho_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r x^{\rho_r}\end{matrix}\right| \begin{matrix}\left(-k-mv;\ \rho_1,\ldots,\rho_r\right), \\ \left(-k-mv+\beta;\ \rho_1,\ldots,\rho_r\right),\end{matrix}$$

$$\times \begin{matrix} \left(-k-mv+\beta-\eta\,;\,\rho_1,\ldots,\rho_r\right),\left(a_j\,;\,\alpha_j^1,\ldots,\alpha_j^{(r)}\right)_{1,p}: \\ \left(-k-mv-\alpha-\eta\,;\,\rho_1,\ldots,\rho_r\right),\left(b_j\,;\,\beta_j^1,\ldots,\beta_j^{(r)}\right)_{1,q}: \end{matrix}$$

$$\times \left.\begin{matrix} \left(c_j^1\,;\,\gamma_j^1\right)_{1,p_1};\ldots;\left(c_j^{(r)},\,\gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \left(d_j^1,\,\delta_j^1\right)_{1,q_1};\ldots;\left(d_j^{(r)},\,\delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r} \end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

(ii) (2.2) में, $\sigma_i,\ v_i \downarrow 0,\ \forall\ i\ \varepsilon\,\{1,\ldots,r\}$ रखने के बाद कुछ सरलीकरण करके सूत्र [3, p. 32 (9)] का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}\, I_{0,y}^{\alpha',\beta',\eta'}\left\{x^k y^{k'}\left(x^{\upsilon}+\xi\right)^{\lambda}\left(y^{\upsilon'}+\delta\right)^{\lambda'}\right.$$

$$\left.\times\, H\left[z_1 x^{\rho_1} y^{\lambda_1},\ldots,z_r x^{\rho_r} y^{\lambda_r}\right]\right\}$$

$$= \xi^{\lambda}\delta^{\lambda'} x^{k-\beta} y^{k'-\beta'} \sum_{l,m=0}^{\infty}\binom{\lambda}{l}\binom{\lambda'}{m}\left(x^{\upsilon}/\xi\right)^{l}\left(y^{\upsilon'}/\delta\right)^{m}$$

$$\times\, H_{p+4,\,q+4\,:\,p_1,q_1\,;\ldots;\,p_r,q_r}^{0,\,n+4\,:\,m_1,n_1\,;\ldots;\,m_r,n_r}\left[\begin{matrix} z_1 x^{\rho_1} y^{\lambda_1} \\ \vdots \\ z_r x^{\rho_r} y^{\lambda_r} \end{matrix}\right|$$

$$\times \begin{matrix} \left(-k'-m\upsilon'\,;\,\lambda_1,\ldots,\lambda_r\right),\left(-k'-m\upsilon'+\beta'-\eta'\,;\,\lambda_1,\ldots,\lambda_r\right), \\ \left(-k'-m\upsilon'+\beta'\,;\,\lambda_1,\ldots,\lambda_r\right),\left(-k'-m\upsilon'-\alpha'-\eta'\,;\,\lambda_1,\ldots,\lambda_r\right), \end{matrix}$$

$$\times \begin{matrix} \left(-k-l\upsilon\,;\,\rho_1,\ldots,\rho_r\right),\left(-k-l\upsilon+\beta-\eta\,;\,\rho_1,\ldots,\rho_r\right), \\ \left(-k-l\upsilon+\beta\,;\,\rho_1,\ldots,\rho_r\right),\left(-k-l\upsilon-\alpha-\eta\,;\,\rho_1,\ldots,\rho_r\right), \end{matrix}$$

$$\times \left. \begin{matrix} \left(a_j;\, \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} : \left(c_j^1;\, \gamma_j^1\right)_{1,p_1}; \ldots; \left(c_j^{(r)},\, \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \left(b_j;\, \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q} : \left(d_j^1,\, \delta_j^1\right)_{1,q_1}; \ldots; \left(d_j^{(r)},\, \delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r} \end{matrix} \right] \tag{3.2}$$

(iii) (3.1) में यदि $\lambda = 0$ रखें (अर्थात् केवल $m = 0$) तो दाँयें पक्ष की श्रणी समाप्त हो जाती है और हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है :

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}\left\{x^k H\left[z_1 x^{\rho_1}, \ldots, z_r x^{\rho_r}\right]\right\} = x^{k-\beta}$$

$$\times H_{p+2,q+2:p_1,q_1;\ldots;p_r,q_r}^{0,n+2:m_1,n_1;\ldots;m_r,n_r}\left[\begin{matrix} z_1 x^{\rho_1} \\ \vdots \\ z_r x^{\rho_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(-k+\beta-\eta;\, \rho_1, \ldots, \rho_r\right), \\ \left(-k-\alpha-\eta;\, \rho_1, \ldots, \rho_r\right), \end{matrix}\right.$$

$$\times \begin{matrix} \left(-k;\, \rho_1, \ldots, \rho_r\right), \left(a_j;\, \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} : \\ \left(-k+\beta;\, \rho_1, \ldots, \rho_r\right), \left(b_j;\, \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q} : \end{matrix}$$

$$\times \left. \begin{matrix} \left(c_j^1;\, \gamma_j^1\right)_{1,p_1}; \ldots; \left(c_j^{(r)},\, \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \left(d_j^1,\, \delta_j^1\right)_{1,q_1}; \ldots; \left(d_j^{(r)},\, \delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r} \end{matrix} \right] \tag{3.3}$$

(iv) (3.2) में यदि $\lambda = 0$, $\lambda' = 0$ रखें (अर्थात् केवल $l = 0$ और $m = 0$) तो दायें पक्ष में शामिल दोनों श्रेणियाँ समाप्त हो जाती हैं और हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है।

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} I_{0,y}^{\alpha',\beta',\eta'}\left\{x^k y^{k'} H\left[z_1 x^{\rho_1} y^{\lambda_1}, \ldots, z_r x^{\rho_r} y^{\lambda_r}\right]\right\}$$

$$= x^{k-\beta} y^{k'-\beta'} \times H_{p+4,q+4:p_1,q_1;\ldots;p_r,q_r}^{0,n+4:m_1,n_1;\ldots;m_r,n_r}\left[\begin{matrix} z_1 x^{\rho_1} y^{\lambda_1} \\ \vdots \\ z_r x^{\rho_r} y^{\lambda_r} \end{matrix} \right|$$

$$\times \begin{matrix} \left(-k'; \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right), \left(-k' + \beta' - \eta'; \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right), \\ \left(-k' + \beta'; \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right), \left(-k' - \alpha' - \eta'; \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right), \end{matrix}$$

$$\times \begin{matrix} \left(-k; \rho_1, \ldots, \rho_r\right), \left(-k + \beta - \eta; \rho_1, \ldots, \rho_r\right), \\ \left(-k + \beta; \rho_1, \ldots, \rho_r\right), \left(-k - \alpha - \eta; \rho_1, \ldots, \rho_r\right), \end{matrix}$$

$$\times \left. \begin{matrix} \left(a_j; \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} : \left(c_j^1; \gamma_j^1\right)_{1,p_1}; \ldots; \left(c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \left(b_j; \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q} : \left(d_j^1, \delta_j^1\right)_{1,q_1}; \ldots; \left(d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r} \end{matrix} \right] \quad (3.4)$$

(v) यहाँ पर हम बहुचरीय सार्वीकृत H-फलन एवं बहुचरीय सार्वीकृत काम्पे-द-फेरी फलन तथा बहुचरीय सर्वीकृत लॉरीसेला फलन में श्रेष्ठकर और सरल संबंध ज्ञात करते हैं।

(1.3) में, $n = p$; $n_1 = p_1, \ldots, n_r = p_r$; $m_1 = 1, \ldots, m_r = 1$ रखने; $q_1, \ldots, q_r$ में गॉमा खण्ड़ों (Gamma factors) को इस प्रकार पर कि वे 1 से q_1, 1से $q_2, \ldots$, 1 से q_r हो जायँ, अंशों (numerators) में सूत्र [3, p. 32 (9)] का प्रयोग करने पर और अंत में $\delta_1^1 = \delta_1^{11} = \ldots = \delta_1^{(r)} = 1$ रखने पर, हम देखते हैं कि बहुचरीय सर्वीकृत H-फलन बहुचरीय सार्वीकृत काम्पे-द-फेरी और बहुचरीय सार्वीकृत लॉरीसेला फलन में टूट जाता है जिससे निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है।

$$H^{0,p:1p_1;\ldots;1p_r}_{p,q:p_1,q_1;\ldots;p_r,q_r} \times \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(a_j; \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} : \\ \\ \left(b_j; \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q} : \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} \left(c_j^1, \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_1}; \ldots; \qquad \left(c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r} \\ \left(d_1^1, \delta_1^1 \text{ or } 1\right), \left(d_j^1, \delta_j^1\right)_{2,q_1}; \ldots; \left(d_1^{(r)}, \delta_1^{(r)} \text{ or } 1\right)\left(d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)}\right)_{2,q_r} \end{matrix} \right]$$

$$= \prod_{j=1}^{r} \Gamma\left(d_1^{(j)}\right) \Gamma\left(1 - d_1^{(j)}\right) \times S^{p:p_1;\ldots;p_r}_{q:q_1;\ldots;q_r} \left[\begin{matrix} \left(1 - a_j; \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} : \\ \\ \left(1 - b_j; \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q} : \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} \left(1 - c_j^1 ; \gamma_j^1\right)_{1, p_1} ; \ldots ; \left(1 - c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)}\right)_{1, p_r} ; \\ \left(1 - d_j^1, \delta_j^1\right)_{1, q_1} ; \ldots ; \left(1 - d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)}\right)_{1, q_r} ; \end{matrix} \; - z_1, \ldots, - z_r \right]$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(1 - a_j\right) \prod_{j=1}^{p_1} \Gamma\left(1 - c_j^1\right) \ldots \prod_{j=1}^{p_r} \Gamma\left(1 - c_j^{(r)}\right)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(1 - b_j\right) \prod_{j=1}^{p_1} \Gamma\left(1 - d_j^1\right) \ldots \prod_{j=1}^{q_r} \Gamma\left(1 - d_j^{(r)}\right)}$$

$$\times \prod_{j=1}^{r} \Gamma\left(d_1^{(j)}\right) \Gamma\left(1 - d_1^{(j)}\right) \times F_{q : q_1 ; \ldots ; q_r}^{p : p_1 ; \ldots ; p_r} \left[\begin{matrix} \left(1 - a_j ; \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1, p} : \\ \\ \left(1 - b_j ; \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1, q} : \end{matrix} \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} \left(1 - c_j^1 ; \gamma_j^1\right)_{1, p_1} ; \ldots ; \left(1 - c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)}\right)_{1, p_r} ; \\ \left(1 - d_j^1, \delta_j^1\right)_{1, q_1} ; \ldots ; \left(1 - d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)}\right)_{1, q_r} ; \end{matrix} \; - z_1, \ldots, - z_r \right] \tag{3.5}$$

(2.1) में, उपर्युक्त अनुसार रखने और $(1 - a_j)$, $(1 - b_j)$, $(1 - c_j)$, $(1 - d_j)$, z's के स्थान पर क्रमशः a_j, b_j, c_j, d_j, $(-z)$'s रखने पर हमें निम्नलिखित सूत्रों की प्राप्ति होती है :

$$I_{0, x}^{\alpha, \beta, \eta} \left\{ x^k \left(x^{\upsilon} + \xi\right)^{\lambda} \times S_{q : q_1 ; \ldots ; q_r}^{p : p_1 ; \ldots ; p_r} \left[\begin{matrix} \left(a_j ; \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1, p} : \\ \\ \left(b_j ; \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1, q} : \end{matrix} \right. \right.$$

$$\times \left. \left. \begin{matrix} \left(c_j^1 ; \gamma_j^1\right)_{1, p_1} ; \ldots ; \left(c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)}\right)_{1, p_r} ; \\ \left(d_j^1, \delta_j^1\right)_{1, q_1} ; \ldots ; \left(d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)}\right)_{1, q_r} ; \end{matrix} \; \frac{z_1 x^{\rho_1}}{\left(x^{\upsilon} + \xi\right)^{\sigma_1}}, \ldots, \frac{z_r x^{\rho_r}}{\left(x^{\upsilon} + \xi\right)^{\sigma_r}} \right] \right\}$$

$$= \xi^{\lambda} x^{k - \beta} \times S_{q + 3 : q_1 ; \ldots ; q_r ; 0}^{p + 3 : p_1 ; \ldots ; p_r, 0} \left[\begin{matrix} \left(-\lambda ; \sigma_1, \ldots, \sigma_r, 1\right), \\ \left(-\lambda ; \sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0\right), \end{matrix} \right.$$

$$\times \begin{matrix} \left(1 + k ; \rho_1, \ldots, \rho_r, \upsilon\right), \left(1 + k - \beta + \eta ; \rho_1, \ldots, \rho_r, \upsilon\right), \\ \left(1 + k - \beta ; \rho_1, \ldots, \rho_r, \upsilon\right), \left(1 + k + \alpha + \eta ; \rho_1, \ldots, \rho_r, \upsilon\right), \end{matrix}$$

$$\times \begin{matrix} \left(a_j ; \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}, 0\right)_{1, p} : \left(c_j^1, \gamma_j^1\right)_{1, p_1} ; \ldots ; \left(c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)}\right)_{1, p_r} ; \ldots ; \\ \left(b_j ; \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}, 0\right)_{1, q} : \left(d_j^1, \delta_j^1\right)_{1, q_1} ; \ldots ; \left(d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)}\right)_{1, q_r} ; \ldots ; \end{matrix} \Bigg]$$

$$\times \frac{z_1 x^{\rho_1}}{\xi^{\sigma_1}}, \ldots, \frac{z_r x^{\rho_r}}{\xi^{\sigma_r}}, -\frac{x^{\upsilon}}{\xi}\Bigg], \tag{3.6}$$

$$I_{0,x}^{\alpha, \beta, \eta}\left\{x^k \left(x^{\upsilon} + \xi\right)^{\lambda} \times F_{q : q_1 ; \ldots ; q_r}^{p : p_1 ; \ldots ; p_r}\left[\begin{matrix} \left(a_j ; \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1, p} : \\ \left(b_j ; \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1, q} : \end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \begin{matrix} \left(c_j^1 ; \gamma_j^1\right)_{1, p_1} ; \ldots ; \left(c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)}\right)_{1, p_r} ; \\ \left(d_j^1, \delta_j^1\right)_{1, q_1} ; \ldots ; \left(d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)}\right)_{1, q_r} ; \end{matrix} \frac{z_1 x^{\rho_1}}{\left(x^{\upsilon} + \xi\right)^{\sigma_1}}, \ldots, \frac{z_r x^{\rho_r}}{\left(x^{\upsilon} + \xi\right)^{\sigma_r}}\right]\right\}$$

$$= \xi^{\lambda} x^{k - \beta} \times \frac{\Gamma(1 + k)\, \Gamma(1 + k - \beta + \eta)}{\Gamma(1 + k - \beta)\, \Gamma(1 + k + \alpha + \eta)}$$

$$\times F_{q+3 : q_1 ; \ldots ; q_r ; 0}^{p+3 : p_1 ; \ldots ; p_r, 0}\left[\begin{matrix} \left(-\lambda ; \sigma_1, \ldots, \sigma_r, 1\right), \\ \left(-\lambda ; \sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0\right), \end{matrix}\right.$$

$$\times \begin{matrix} \left(1 + k ; \rho_1, \ldots, \rho_r, \upsilon\right), \left(1 + k - \beta + \eta ; \rho_1, \ldots, \rho_r, \upsilon\right), \\ \left(1 + k - \beta ; \rho_1, \ldots, \rho_r, \upsilon\right), \left(1 + k + \alpha + \eta ; \rho_1, \ldots, \rho_r, \upsilon\right), \end{matrix}$$

$$\times \begin{matrix} \left(a_j ; \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}, 0\right)_{1, p} : \left(c_j^1, \gamma_j^1\right)_{1, p_1} ; \ldots ; \left(c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)}\right)_{1, p_r} ; \ldots ; \\ \left(b_j ; \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}, 0\right)_{1, q} : \left(d_j^1, \delta_j^1\right)_{1, q_1} ; \ldots ; \left(d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)}\right)_{1, q_r} ; \ldots ; \end{matrix} \Bigg]$$

$$\times \frac{z_1 x^{\rho_1}}{\xi^{\sigma_1}}, \ldots, \frac{z_r x^{\rho_r}}{\xi^{\sigma_r}}, -\frac{x^{\upsilon}}{\xi}\Bigg], \tag{3.7}$$

(vi) (3.7) में, $\lambda = 0\ (m = 0)$, $\upsilon = 0$, $\sigma_i \downarrow 0$, $\rho_i \downarrow 1\ (i = 1, \ldots, r)$ रखने तथा k, β, μ, α के स्थान पर क्रमशः $(\lambda - 1)$, $(\lambda - \mu)$, $(\theta_1 - \eta)$, $(\theta_2 - \lambda - \eta)$ रखने पर हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है :

$$I_{0,x}^{\theta_2 - \lambda - \eta, \lambda - \mu, \eta} \left\{ x^{\lambda - 1} F_{q:q_1;\ldots;q_r}^{p:p_1;\ldots;p_r} \begin{bmatrix} z_1 x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r x \end{bmatrix} \right\}$$

$$= x^{\mu - 1} \times \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\theta_1)}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\theta_2)} \times F_{q+2:q_1;\ldots;q_r}^{p+2:p_1;\ldots;p_r} \left[\begin{matrix} (\lambda;\, 1, \ldots, 1),\ (\theta_1;\, 1, \ldots, 1), \\ (\mu;\, 1, \ldots, 1),\ (\theta_2;\, 1, \ldots, 1), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \times \begin{matrix} \left(a_j;\, \alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} : \left(c_j^1, \gamma_j^1\right)_{1,p_1}; \ldots; \left(c_j^{(r)}, \gamma_j^{(r)}\right)_{1,p_r}; \\ \left(b_j;\, \beta_j^1, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q} : \left(d_j^1, \delta_j^1\right)_{1,q_1}; \ldots; \left(d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)}\right)_{1,q_r}; \end{matrix}\ z_1 x, \ldots, z_r x \right] \tag{3.8}$$

(vii) (3.8) में यदि α's, β's, γ's, δ's का मान इकाई रखें और $\theta_1 = \theta_2$ लें, साथ ही

(a) $p = 1; p_1 = \ldots = p_r = 1; q = 0; q_1 = \ldots = q_r = 1; a_1 = \mu$ और $c_1^1, c_1^{11}, \ldots, c_1^{(r)}; d_1^{11}, \ldots, d_1^{(r)}$ के स्थान पर क्रमशः $c_1, c_1^{11}, \ldots, d_r; d_1, d_2, \ldots, d_r$ रखने पर

(b) $p = 0;\ p_1 = \ldots = p_r = 2;\ q = 1;\ q_1 = \ldots = q_r = 0; b = \lambda$औ र $c_1^1, c_1^{11}, \ldots, c_1^{(r)}$; $d_1^1, d_1^{11}, \ldots, \ldots, d_1^{(r)}$ के स्थान पर क्रमशः $c_1, c_2, \ldots, c_r; d_1, d_2, \ldots, d_r$ रखने पर

(c) $p = 2; p_1 = \ldots = p_r = 0; q = 0; q_1 = \ldots = q_r = 1; a_1 = a, a_2 = \mu$ और $d_1^1, d_1^{11}, \ldots, d_1^{(r)}$ के स्थान पर क्रमशः $d_1, d_2, \ldots, d_r$ रखने पर

(d) $p = 1; p_1 = \ldots = p_r = 1; q = 1; q_1 = \ldots = q_r = 0; a_1 = \mu,\ b_1 = b$ और $c_1^1, c_1^{11}, \ldots, c_1^{(r)}$; के स्थान पर क्रमशः $c_1, c_2; \ldots c_r$ रखने पर

(e) $p = 1; p_1 = \ldots = p_r = 1; q = 1; q_1 = \ldots = q_r = 0; a_1 = a, b_1 = \lambda$ और $c_1^1, c_1^{11}, \ldots, c_1^{(r)}$; À स्थान पर क्रमशः $c_1, c_2, \ldots, c_r$ रखने पर

(f) $p = 0;\ p_1 = \ldots = p_1;\ q = 1;\ q_1 = \ldots = q_r = 0; b_1 = \lambda$ और $c_1^1, c_1^{11}, \ldots, c_1^{(r)}$ के स्थान पर क्रमशः $c_1, c_2; \ldots c_r$ रखने पर

(g) $p = 1; p_1 = \ldots = p_r = 0; q = 0; q_1 = \ldots = q_r = 1; a_1 = \mu$ और $d_1^{I}, d_1^{II}, \ldots, d_1^{(r)}$ के स्थान पर क्रमशः $d_1, d_2, \ldots, d_r$ रखने पर

(h) (d) में और भी यदि $b = \lambda$ या (e) में $a = \lambda$ रखें

(i) (d) में और भी यदि $b = \lambda$ या (e) में $a = \mu$ रखें

ते हमे r चरों के लॉरीसेला हाइपरज्यामितीय फलनों $F_A^{(r)}$, $F_B^{(r)}$, $F_c^{(r)}$ $F_D^{(r)}$ 'तथा संगामी हाइपरज्यामितीय फलनों $\phi_2^{(r)}$, $\psi_2^{(r)}$ में निम्नलिखित संबंधों की प्राप्ति होती है।

$$I_{0,x}^{\theta_2-\lambda-\eta,\lambda-\mu,\eta}\left\{x^{\lambda-1}F_A^{(r)}\times\left[\mu, c_1, \ldots, c_r; d_1, \ldots, d_r; z_1 x, \ldots, z_r x\right]\right\}$$

$$= x^{\mu-1}\times\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}\times F_A^{(r)}\left[\lambda, c_1, \ldots, c_r; d_1; z_1 x, \ldots, z_r x\right], \qquad (3.9)$$

$$\text{Re}(\lambda) > 0, \left\{\left|z_1 x\right| + \ldots + \left|z_r x\right|\right\} < 1.$$

$$I_{0,x}^{\theta_2-\lambda-\eta,\lambda-\mu,\eta}\left\{x^{\lambda-1}F_B^{(r)}\times\left[c_1, \ldots, c_r; d_1, \ldots, d_r; \lambda; z_1 x, \ldots, z_r x\right]\right\}$$

$$= x^{\mu-1}\times\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}\times F_B^{(r)}\left[c_1, \ldots, c_r, d_1, \ldots, d_r; \mu; z_1 x, \ldots, z_r x\right], \qquad (3.10)$$

$$\text{Re}(\lambda) > 0, \left\{\left|z_1 x\right| + \ldots + \left|z_r x\right|\right\} < 1.$$

$$I_{0,x}^{\theta_2-\lambda-\eta,\lambda-\mu,\eta}\left\{x^{\lambda-1}F_C^{(r)}\times\left[a\,\mu; d_r; \ldots, d_r; z_1 x, \ldots, z_r x\right]\right\}$$

$$= x^{\mu-1}\times\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}\times F_C^{(r)}\left[a, \lambda; d_1, \ldots, d_r; z_1 x, \ldots, z_r x\right], \qquad (3.11)$$

$$\text{Re}(\lambda) > 0, \left\{ \sqrt{|z_1 x|} + \ldots + \sqrt{|z_r x|} \right\} < 1.$$

$$I_{0,x}^{\theta_2 - \lambda - \eta, \lambda - \mu, \eta} \left\{ x^{\lambda - 1} F_D^{(r)} \times \left[\mu, c_1, \ldots, c_r; b; z_1 x, \ldots, z_r x \right] \right\}$$

$$= x^{\mu - 1} \times \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} \times F_D^{(r)} \left[\lambda, c_1, \ldots, c_r; b; z_1 x, \ldots, z_r x \right], \tag{3.12}$$

$$\text{Re}(\lambda) > 0, \left\{ |z_1 x| + \ldots + |z_r x| \right\} < 1.$$

$$I_{0,x}^{\theta_2 - \lambda - \eta, \lambda - \mu, \eta} \left\{ x^{\lambda - 1} F_D^{(r)} \times \left[a, c_1, \ldots, c_r; \lambda; z_1 x, \ldots, z_r x \right] \right\}$$

$$= x^{\mu - 1} \times \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} \times F_D^{(r)} \left[a, c_1, \ldots, c_r; \mu; z_1 x, \ldots, z_r x \right], \tag{3.13}$$

$$\text{Re}(\lambda) > 0, \left\{ |z_1 x| + \ldots + |z_r x| \right\} < 1.$$

$$I_{0,x}^{\theta_2 - \lambda - \eta, \lambda - \mu, \eta} \left\{ x^{\lambda - 1} \phi_2^{(r)} \times \left[c_1, \ldots, c_r; \lambda; z_1 x, \ldots, z_r x \right] \right\}$$

$$= x^{\mu - 1} \times \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} \times \phi_2^{(r)} \left[c_1, \ldots, c_r; \mu; z_1 x, \ldots, z_r x \right], \tag{3.14}$$

$$\text{Re}(\lambda) > 0, \left\{ |z_1 x| + \ldots + |z_r x| \right\} < 1.$$

$$I_{0,x}^{\theta_2 - \lambda - \eta, \lambda - \mu, \eta} \left\{ x^{\lambda - 1} \psi_2^{(r)} \times \left[\mu; d_1, \ldots, d_r; z_1 x, \ldots, z_r x \right] \right\}$$

$$= x^{\mu - 1} \times \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} \times \psi_2^{(r)} \left[\lambda; d_1, \ldots, d_r; z_1 x, \ldots, z_r x \right], \tag{3.15}$$

$$\text{Re}(\lambda) > 0, \left\{ |z_1 x| + \ldots + |z_r x| \right\} < 1.$$

$$I_{0,x}^{\theta_2 - \lambda - \eta, \lambda - \mu, \eta} \left\{ x^{\lambda - 1} \prod_{i=1}^{r} \left(1 - z_1 x \right)^{c_i} \right\}$$

$$= x^{\mu-1} \times \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} \times F_D^{(r)}\Big[\lambda; c_1, \ldots, c_r; \mu;\ z_1 x, \ldots, z_r x\Big], \quad (3.16)$$

$$\text{Re}(\lambda) > 0, \Big\{ \big| z_1 x \big| + \ldots + \big| z_r x \big| \Big\} < 1.$$

$$I_{0,x}^{\theta_2-\lambda-\eta, \lambda-\mu, \eta} \Big\{ x^{\lambda-1} F_D^{(r)}\Big[\mu; c_1, \ldots, c_r; \lambda;\ z_1 x, \ldots, z_r x\Big]\Big\}$$

$$= x^{\mu-1} \times \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} \times \prod_{i=1}^{r}\Big(1 - z_i x\Big)^{-C_i}, \quad (3.17)$$

$$\text{Re}(\lambda) > 0, \Big\{ \big| z_1 x \big| + \ldots + \big| z_r x \big| \Big\} < 1.$$

इसी प्रकार और भी अनेक अनुप्रयोग ज्ञात किये जा सकते हैं।

फलन $f(x)$ का μ वॉ समिश्र कोटि (या $-\mu$ वॉ समिश्रकोटि) के रीमन -लियोविले भिन्नात्मक अवकलज को ओल्धम तथा स्पेनियर [2, p, 49] का अनुकरण करते हुए निम्नवत् परिभाषित किया जा सकता है :

$$_{\alpha}D_x^{\mu} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\mu)} \displaystyle\int_{\alpha}^{x} (x-y)^{-\mu-1} f(y)\,dy, \ \text{Re}(\mu) < 0 \\ \\ \dfrac{d^n}{dx^n}\ {}_{\alpha}D_x^{\mu-n} f(x), \ 0 \le \text{Re}(\mu) < m,\ m \in N_0 \end{cases} \quad (3.18)$$

जहाँ पर $N_0 = N \dot{U}\{0\}, (N = \{1< 2, \ldots\}).$

$_{\alpha}$ D_x^{μ} की विशेष परिस्थिति में जब $\alpha = 0$ हो निम्न प्रकार से लिखा जाता है :

$$_{\alpha}D_x^{m} \equiv {}_0D_x^{\mu}$$

(1.1) यदि $\beta = -\alpha,\ \alpha = -\mu$ रखें तो हम देखते हैं कि

$$I_{0,x}^{-\mu,\mu,\eta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^x (x-t)^{-u-1} f(t)\,dt = D_x^{\mu} f(x), \quad (3.9)$$

अतः संबंध (3.19) को ध्यान में रखते हुए (2.1), (2.2) सूत्रों ,से सहजता से श्रीवास्तव के सूत्रों[17] को प्राप्त किया जा सकता है।

इसी तरह संबंध(3.1) से (3.8) के बैधता प्रतिबंधों को उनको मुख्य प्रतिबंधों से सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक म० प्र० विज्ञान एवं तकनीकी परिषद के प्रति अपना आभार व्यक्त करता है जिसने लेखक को उसकी शोध परियोजना Code No. 20 / 95 के रूप में वित्तीय सहायता प्रदान की है।

निर्देश

1. मथाई, ए. एम. तथा सक्सेना, आर. के. The H-function with application in Statistics and other disciplines, Halsted Press N. Y. (1970)
2. ओल्धम, के. बी. तथा स्पेनियर, जे., The Fractional Calculus, Academic Press, N. Y. (1994)
3. रेनविले, जे. डी. Special Functions, MacMillan Co., NY (1967)
4. सेगो, एम., Math. Rep. College, General Ed. Kyushu Univ. 1978, 11, 135-143
5. सेगो, एम. Math. Japan, 1979, 24 , 377-385
6. सेगो, एम. Math. Japan, 1980, 25, 211-220
7. सेगो, एम. Math. Rep. College, General Ed. kyushu Univ. 1980, 12, 63-67
8. सेगो, एम. Math. Japan, 1981, 26, 103-119
9. सेगो, एम. Bull. Central Res. Inst. Fukuoka Univ. 1983; 27-32
10. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा दाओस्त, एम. सी. Nederl, Akad Wetensch. Indag, Math 1969, 31, 449-457
11. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा पंडा, आर., Comment, Math. Univ. St. Paul 1975, 24 Fasc. 2, 119-137, वही 1976, 25, Fasc 2, 167-197
12. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा पंडा, आर., J. Reine, Angew, Math. 1976, 288, 129-145
13. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा पंडा, आर., J. Reine Angew, Math 1976, 283/284, 265-274
14. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा पंडा, आर., Nederl, Akad. Wetensch Proc. Ser. A82 = Indag. Math 1979, 41, 353-362
15. श्रीवास्तव, एच. एम.. तथा पंडा, आर., Nederl, Akad. Wetensch Proc. Ser. A82=Indag Math. 1979, 353-362
16. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा पंडा, आर., Bull. Inst. Math. Acad. Sincica, 1981, 9, 261-277

17. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा पंडा, आर., The H-Function of one and two variables with applications, South Asian Publ. New Delhi/Madras, (1982)

18. श्रीवास्तव, एच. एम. चन्देल, आर. सी. एस. तथा विश्वकर्मा, पी. के. Jour. Math. Analysis, Appl 1994, 184 (3), 560-572

19. श्रीवास्तव, एच. एस. पी., J. Indian Acad. Math. 1996, 18 (2), 225-239

20. श्रीवास्तव, एच. एस. पी., J. Indian Acad. Math 1997, 19 (1), 47-58

21. श्रीवास्तव, एच. एस. पी., Math. Edu. 1996, 30 (4), 219-226

22. श्रीवास्तव, एच. एस. पी., Math Edu. 1997, 31 (2), 61-68

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 1, January, 1999.

घरेलू वाहित मलजल सिंचित मृदा में पालक द्वारा भारी धातुओं का उद्ग्रहण

शिव गोपाल मिश्र, देवीदयाल पाण्डेय तथा दिनेश मणि

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त-अक्टूबर 28, 1998]

सारांश

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की वाहित मलजल सिंचित मृदा में मसूरीरॉक फास्फेट (म. रा. फा.) की दो विभिन्न मात्रायें 400 तथा 700 कि० ग्रा० प्रति हेक्टेयर के प्रयोग पश्चात् पालक उगायी गयी । फसल की सिंचाई वाहित मलजल तथा सामान्य जल दोनों से की गयी। अध्ययन के पश्चात् यह पाया गया कि वाहित मलजल से सिंचाई करने पर मसूरी रॉक फास्फेट की अधिक मात्रा के साथ भारी धातुओं का उद्ग्रहण नियन्त्रण की तुलना में कम हुआ। सामान्य जल से सिंचाई करने पर मसूरी रॉक फास्फेट की अधिक मात्रा के साथ कुछ भारी धातुओं जैसे लेड, कैडमियम का उद्ग्रहण सामान्य जल की तुलना में अधिक रहा।

Abstract

Uptake of heavy metals by spinach grown on a domestic sewage irrigated soil. *By* S. G. Misra, Devi Dayal Pandey and Dinesh Mani, Sheila Dhar Institute of Soil Science, Allahabad 211002

Field experiments were conducted at experimental farm of Sheila Dhar Institute of Soil Science which is being irrigated with domestic sewage for the last 20 years. Two different doses of Mussorie rock phosphate viz–400 and 700 kg/ha were applied and spinach was grown as a test crop. It was observed that in sewage irrigated plots the uptake of heavy metals was reduced with the increased dose of Mussorie rock phosphate in comparison to control. In tap water irrigated plots the uptake of some heavy metals *viz.*–Pb, Cd, remained the same while

the uptake of Zn, Cu and Cr was increased in sewage irrigated soil in comparison to tap water irrigated soil.

विभिन्न ऑकड़ों के आधार पर हमारे देश में लगभग 800-1000 मिलियन गैलन वाहित मलजल उपलब्ध है, जिसका 10 प्रतिशत भाग सिंचाई के उद्देश्य से प्रयोग होता है। घरेलू वाहित मलजल में पोषक तत्व के रूप में नाइट्रोजन, फासफोरस, पोटाश तथा कुछ सूक्ष्ममात्रिक तत्व एवं भारी धातुयें पायी जाती हैं। भारी धातुओं में कुछ धातुओं की सान्द्रता मलजल की प्रकृति के अनुसार अधिक या कम होती है। इस प्रकार मलजल से लगातार सिंचित मृदा में इन धातुओं का संचय हो जाता है। मृदा में भारी धातुओं का अधिशोषण कार्बनिक या अकार्बनिक कोलायड दोनों के साथ होता है। वाहित मलजल में सिंचाई करने पर मिट्टी में कार्बनिक पदार्थ की मात्रा बढ़ती है। फलतः मिट्टी की संरचना सुधरती है, किन्तु लगातार अनुपचारित वाहित मलजल से सिंचाई करने पर भविष्य में नाइट्रोजन के खनिजीकरण पर प्रतिकूल असर पड़ सकता है[1]। कार्बनिक पदार्थ धातु तत्वों के निक्षेपण में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। कार्बनिक पदार्थों के साथ भारी धातुओं का संकुलन मिट्टी में किसी न किसी रूप में पाया जाता है[2]। कार्बनिक पदार्थ की उपस्थिति में फास्फोरसयुक्त उर्वरकों की विलेयता बढ़ती है। कार्बनिक पदार्थ एवं फासफोरसयुक्त उर्वरक (मसूरी रॉक फास्फेट) की उपस्थिति में विषैले भारी तत्वों का उद्ग्रहण पौधों में कम होता है क्योंकि कार्बनिक पदार्थ भारी तत्वों के साथ जटिल यौगिक बनाता है[3]।

अतः प्रस्तुत अध्ययन में फास्फोरस युक्त उर्वरक (मसूरी रॉक फास्फेट म० रा० फा०) के साथ भारी धातुओं की अन्तःक्रिया तथा पालक पर उसके प्रभाव को देखने की रूपरेखा बनायी गयी।

प्रयोगात्मक

सामग्री एवं परीक्षण विधि

प्रस्तुत शोधकार्य हेतु क्षेत्र प्रयोग शीलाधर फार्म पर किया गया। इस फार्म पर घरेलू वाहित मलजल की सुविधा उपलब्ध है। अतः मलजल से लगभग दो दशक से सिंचाई हो रही है। इस प्रयोग में सूचक फसल के रूप में पालक को उगाया गया। प्रयोग के अंतर्गत 18 वर्गमीटर के क्षेत्रफल में यादृच्छिक विधि से 1×1 मी^{2} के 18 प्लाट बनाये गये। सुधारक के रूप में मसूरी रॉक फास्फेट की दो विभिन्न मात्रायें (400 कि० ग्रा० एवं 700 कि० ग्रा० प्रति हेक्टेयर) वाहित मलजल से सिंचित प्लाट में तथा यही मात्रा सामान्य जल से सिंचित प्लाट में प्रयोग की गयी। मसूरी रॉक फास्फेट में फास्फोरस पेंटाक्साइड की मात्रा 19.4 प्रतिशत थी।

मृदा के भौतिक तथा रासायनिक गुण सारणी-1 में दिये गये हैं। सूचक फसल के रूप में पालक की बुवाई 20 कि० ग्रा०/हेक्टेयर बीजदर से की गयी। प्लाटों की सिंचाई वाहित मलजल एवं सामान्य जल से समय-समय पर की गई। फसल के पूरे काल में कुल 10 सिंचाइयाँ की गई। पौधों की बढ़वार सम्बन्धी प्रेक्षण, प्रथम बुवाई के 10 दिन बाद तथा बाद में 15 दिन के अन्तराल से किया गया। प्रत्येक प्लाट के 5 पौधों का चयन किया गया जिनकी पत्ती संख्या, बढ़वार-ऊँचाई का प्रेक्षण अंतिम समय

तक किया गया। बुवाई के 45 दिन बाद फसल की कटाई कर ली गई। फसल को जड़ सहित उखाड़ा गया तथा कुल जैवभार (जड़सहित एवं जड़रहित) ज्ञात किया गया। परिणाम सारणी–2 में अंकित है।

भारी धातुओं के विश्लेषण हेतु सुखाई गई पौधे की पत्तियों एवं जड़ों के 2 ग्राम पिसे हुये नमूने को लेकर ट्राई एसिड मिश्रण की सहायता से द्रवीय नमूना तैयार करके 'एटामिक एब्जार्प्सन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर' की सहायता से भारी धातुओं का विश्लेषण किया गया। मृदा नमूने का डी० टी० पी० ए० निष्कर्षण तैयार करके ए० ए० एस० (A. A. S.) की सहायता से भारी धातुओं का विश्लेषण किया गया। परिणाम सारणी-3 में अंकित हैं।

सारणी 1

मृदा के भौतिक रासायनिक गुण

गुण	कुल मात्रा
पी०एच०	7.8
धनायंन विनिमय क्षमता (सी०ई०सी)	19.5 C mol $(p^{+})Kg^{-1}$
विद्युत् चालकता (E. C.)	2199 d $S^{-m^{-1}}$ (at $25^{o}C$)
कार्बनिक कार्बन	1.59%
नाइट्रोजन	0.069% उपलब्ध नाइट्रोजन 0.28%
फासफोरस	0.1%
कैल्शियम ($CaCO_3$)	5.4%
जिंक (Zn)	10.4 पी०पी०एम०
कॉपर (Cu)	10.5 पी०पी०एम०
कैडमियम (Cr)	0.75 पी०पी०एम०
क्रोमियम	1.55 पी० पी० एम०
सीसा (Pb)	1.07 पी०पी०एम०

सारणी 3

मृदा में भारी धातुओं की उद्ग्रहीत मात्रा
(मलजल एवं मसूरी रॉफ फास्फेट तथा पानी एवं मसूरी रॉफ फास्फेट के प्लाटों का विश्लेषण)

उपचार	भारी धातुयें (पी० पी० एम० में)				
नियन्त्रण (पानी)	जिंक	कॉपर	क्रोमियम	सीसा	कैडमियम
नियन्त्रण (मलजल)	10	9	0.2	1.00	0.04
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	11	10	1.46	1.00	0.078
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	11.5	10.2	1.32	1.11	0.050
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	10.1	10	1.20	0.076	0.070
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	10	8	0.40	1.06	0.68
भ० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	10.1	8	0.19	0.931	0.68

सारणी 4

पत्तियों में भारी धातुओं की मात्रा (पी० पी० एम० में)

उपचार	भारी धातुयें				
	जिंक	कॉपर	क्रोमियम	सीसा	कैडमियम
नियन्त्रण (पानी)	1.50	0.620	0.351	0.426	0.004
नियन्त्रण (मलजल)	1.82	0.723	0.628	0.750	0.008
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	1.83	0.601	0.549	0.658	0.006
म० रा० फा० 700 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	1.80	0.600	0.530	0.404	0.005
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+पानी	1.50	0.500	0.500	0.390	0.003
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+पानी	1.50	0.440	0.980	0.305	0.003

सारणी 4 में भारी धातुओं की मात्रा से स्पष्ट है कि म० रा० फा० की बढ़ती हुई मात्रा के साथ धातुओं का उद्ग्रहण कम हुआ। इससे निष्कर्ष यह है कि मृदा में उपलब्ध फासफोरस के द्वारा उद्ग्रहण में कम आई। मसूरी राफ फास्फेट के साथ मृदा में भी इन भारी धातुओं की उपलब्ध मात्रा में कमी आती है इसीलिए इनका उद्ग्रहण भी कम होता है।

अतएव यह निष्कर्ष निकलता है कि वाहित मलजल सिंचित मृदा में यदि फासफोरस युक्त उर्वरकों का प्रयोग किया जाय तो पौधों द्वारार भारी धातुओं का उद्ग्रहण कम किया जा सकता है।

चूँकि प्रयुक्त मलजल में फास्फेट की मात्रा कम है इसलिए अवमल में फास्फेट बढ़ाने में उनमें विद्यमान भारी धातुएं काफी हद तक अविषैली बन सकती हैं।

सन्दर्भ

1. मिश्रा, एस. जी. श्रीवास्तव, सी. पी., तथा दिनेश मणि, : विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका 1988, **31** (4), 185-189

2. ब्लूमफील्ड, सी., किल्सों, डब्ल्यू. आई. तथा प्रूडेन, जी. *Soil Sci.*, 1976 27, 16-31.

3. स्ट्रिकलैंण्ड, आर. सी., चेने, डब्लू., आर. तथा केमोरेक्स, आर. जे. *Plant and Soil*, 1979, 52, pp. 393-402.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 1, January, 1999.

अर्गट-एल्कैलायडों के निमज्जित किण्वनीय उत्पादन के लिए प्राचलों का इष्टतमीकरण

एस० पी० सिंह, पी० के० चौरसिया
तथा
शान्तिकुमार पाण्डेय
रसायन विज्ञान, मगध विश्वविद्यालय, बोधगया (बिहार)

[प्राप्त-जनवरी 28, 1998]

सारांश

उच्च स्तर पर अर्गट ऐल्कलायडों के उत्पादन हेतु इष्टतम प्राचल ज्ञात करने के लिए क्लैविसेप्स पुरपुरिया SS-8 के निमज्जित संवर्धों के साथ अध्ययन किया गया। यह पाया गया कि क्लैसेप्स पुरपुरिया SS-8 की सक्रियता तब अधिकतम होती है जब 25% सुक्रोस के साथ अन्य पोषणीय घटकों को 5.4 पी. एच पर 15 दिनों तक 24° से० ताप पर किण्वित होने दिया जाता है।

Abstract

Optimization of parameters for submerged fermentative production of Ergot alkaloids. *By* S. P. Singh, P. K. Chaurasia and Shanti Kumari Pandey, Department of Chemistry, Magadh University, Bodh-Gaya, (Bihar).

Studies were conducted on submerged culture of *Claviceps purpurea* SS-8 to determine the parameters *e.g.*, hydrogen ion concentration, temperature, and incubation period on ergot alkaloids production of high levels. It has been found that activity of *Claviceps purpurea* SS-8 is maximum when 25% sucrose solution along with other nutritional ingredients of the fungus *Claviceps purpurea* SS-8 is allowed to ferment for 12 days at 24°C by maintaining the pH value of the medium at 5.4

कुछ कार्यकर्ताओं ने[1-6] अर्गट ऐल्कैलायडों के निमज्जित किण्वन के लिए प्राचलों के इष्टतमीकरण के बारे में अध्ययन किया हैं। अर्कामोन इत्यादि[7] ने अर्गट एल्कैलायडों के जैव संश्लेषण का अध्ययन करके सूचित किया कि इष्टतम ताप 23° से० है। इसी तरह अबे[8] एवं सिन्डिश तथा ब्रान[9] ने क्लैविसेप्स पुरपुरिया की इष्टतम वृद्धि के लिए पी. एच 5.6 सूचित किया है। स्पैला[10] ने यह स्थापित किया है कि 14 दिनों की इनक्युबेशन अवधि क्लैविसेप्स पुरपुरिया की सर्वोत्तम सक्रियता के लिए अनुकूल होती है।

इन अध्ययनों को देखते हुए प्रस्तुत अध्ययन निमज्जित अर्गट-एल्कैलायड उत्पादन पर पी एच, ताप तथा इनक्यूबेशन अवधि का प्रभाव ज्ञात करने की दृष्टि से किया गया।

प्रयोगात्मक

जीव तथा संवर्धन विधियाँ : इस अध्ययन के लिए क्लैविसेप्स पुरपुरिया का प्रभेद SS-8 काम में लाया गया। मूलतः इसे स्क्लेरोटिया से विलगित किया गया जो पेनिसेटम टाइफाइडियम (*Pennisetum typhoideum*) परपोषी से प्राप्त किया गया था।

जीव को जापेक-डाक्स ऐगर स्लांट में रखा गया और 180 चक्र प्रति मिनट की दर से घूर्ण हल्लित्र (rotary shaker) में 24°से० ताप पर हल्लित संवर्द्धों में उगाया गया। ऐगर स्लांट से माइसीलियम का कुछ भाग लेकर द्रव संवर्द्ध-माध्यम -NL-406 भरे पलिधों में इनाकुलेशन द्वारा प्रभेद को पाला गया[11]। NK-406 संवर्ध माध्यम में निम्नवत् घटक थे (प्रति लीटर आसुत जल में) सुक्रोस (50 ग्राम); सक्सिनिक अम्ल (5.4 ग्राम), यीस्ट निष्कर्ष (3 ग्राम) $MgSO_4.7H_2O$ (0.3 ग्रा.), $FeSO_4.7H_2O$ (0.01 ग्रा.), $ZnSO_4$ $7H_2O$ (0.0044 ग्रा.०। इसके पी- एच को 5.4 पर लाने के लिए पर्याप्त NH_4OH डाला गया। इनाकुलम तैयार करने के लिए जीव को पहले ही हल्लन संवर्धो (Shake Culture) में वर्धित किया गया। जिनमें 100 मिली० माध्यम था। 5-7 दिन बाद 2 मिली० भाग में हुई वृद्धि का उपयोग नवीन माध्यमों को इनाकुलेट करने के लिए किया गया।

उत्पादन माध्यम[6] : किण्वन माध्यम में निम्नलिखित घटक थे (ग्रा०/ली०) :

सुक्रोस (250ग्रा०), सिट्रिक अम्ल (15 ग्रा०), यीस्ट निष्कर्ष (0.1ग्रा०), KH_2PO_4 (0.5 ग्रा०), $MgSO_4$ $7H_2O$ (0.5 ग्रा०) KCl (0.12 ग्रा०), $FeSO_4$. $7H_2O$ (0.007 ग्रा०), $ZnSO_4$. $7H_2O$ (0.006 ग्रा०)

NH_4OH विलयन द्वारा पी०एच को 5.4 पर लाया गया। आसुत जल डालकर आयतन 1000 मिली० बनाया गया। प्रत्येक प्रयोग में अर्गट-एल्कैलाइडों के निमज्जित किण्वनीय उत्पादन के लिए 100 मिली० उत्पादन माध्यम प्रयुक्त किया गया। इस तरह 54 शंक्वाकारपलियों को रुई की ढ़ाठ से बन्द करके 15 पौंड भाप पर आटोक्लेव में 25 – 30 मिनट तक निर्जर्मित किया गया और फिर कमरे के ताप तक ठंडा किया गया। अब समस्त पलिघों को तीन सेटों में (18 पलिघ प्रत्येक में) बांट लिया गया। प्रथम तीन सेटों को पुनः 6 उपसेटों में बांट लिया गया जिनमें से प्रत्येक में तीन तीन पलिघ थे और इनका उपयोग क्रमशः पी- एच, ताप तथा इन्क्यूबेशन अवधि का प्रभाव देखने के लिए किया

गया। अव प्रत्येक पलिघ को क्लैविसेप्स पुरपुरिया SS-8 के 7 दिन पुराने संवर्ध के 2 मिमी० से इनाकुलेट किया गया। इन्हें 180 चक्र प्रति मिनट वाले घूर्णी हल्लित्र में रखा गया।

परीक्षण विधियाँ : विभिन्न अवस्थाओं में निर्मित अर्गट-एल्कैलायडों का रंगमापी निश्चयन किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 में विभिन्न पी-एच, इनक्यूबेशन अवधियों का क्लैविसेप्स पुरपुरिया SS-8 द्वारा अर्गट-एल्कैलाइडों के निमज्जित किण्वनीय उत्पादन पर जो प्रभाव पड़ता है उसे दर्शाया गया है।

सारणी 1

पी-एच, ताप तथा इनक्युबेशन अवधि का सी० पुरपुरिया SS-8 द्वारा अर्गट-एल्कैलायड के निमज्जित किण्वीय उत्पादन पर प्रभाव

सुक्रोस % ग्राम/100ली०	पी०एच	ताप °C	इनक्युबेशन अवधि(दिन)	अर्गट-एल्कैलायडों की संगत उपलब्धि मिग्रा/ली०		
	1	2	3	1	2	3
25	4.5	20	6	788	600	400
25	5.0	22	8	800	715	530
25	5.2	24*	10	825	900§	892
25	5.4*	26	12*	910§	860	925§
25	5.6	28	14	614	600	898
25	5.8	30	16	586	545	608

प्रत्येक मान तीन प्रयोगों का माध्य है

* इष्टतम प्राचल अर्गट एल्कैलायडों की इष्टतम उपलब्धि

§ प्रयोगिक विचलन ± 0.5 से 1.5%

सारणी से ज्ञात होता है कि पी-एच 5.4 पर क्लैविसेप्स पुरपुरिया की सक्रियता सर्वाधिक रहती है। अम्लीय माध्यम में अर्गट एल्कैलायडों का उत्पादन सार्थक नहीं हुआ। किन्तु उच्चतर पी- एच पर उत्पादन में लगातार कमी होती गई।

इसी तरह 24° से० पर क्लैविसेप्स पुरपुरिया SS-8 की सक्रियता सर्वाधिक रही। कम ताप पर (20-22° से०) उत्पादन उपेक्षणीय रहा किन्तु उच्चतर तापों (26° से 30° से०) पर भी अर्गट-एल्कैलायडों का उत्पादन घटता गया।

सारणी से यह भी पता चलता है कि क्लैविसेप्स पुरपुरिया SS-8 द्वारा अर्गट-एल्कैलायडों के उत्पादन के लिए 12 दिन की इनक्यूबेशन अवधि सर्वाधिक अनुकूल थी। 14 तथा 16 दिनों की इनक्यूबेशन अवधि के बाद अर्गट की उपलब्धि में कोई बढ़ोतरी नहीं हुई।

निर्देश

1. मिजराही, ए., तथा मिलर पी. : Biotechnol Bioeng, 1968 : 10, 102

2. कैस्टैग्नोली, ए. तथा टोनोला, ए. : Proc. 9th Intern. Congr Microbiol, Moscow 1966, पृ०31

3. ऐमिसी, ए. एस., इत्यादि : Experimentia, 1966 : 22, 415.

4. टेबर, डब्लू., ए. : Lloydia, 1969 : 30, 39

5. शास्त्री, के. एस. एम., ओह, ए., तथा अटल, सी. के. : Indian Drugs, 1979 : 16, 88

6. सिंह, एस. पी., समदानी, जी., मेहतो, पी., सी. तथा राठौर, एन., : Asian J. Chem. 1988 : 10, 373

7. अर्कमोन, एफ., इत्यादि : Proc. Roy. Soc., 1961 : B-155, 26

8. एबे, एम. जे. : Agric Chem. Soc., 1946 : 21, 10

9. सिनडिश्च, एस. तथा ब्रॉन, डब्लू., U.S. Patent 2,936, 1960 : 266,

10. स्पैला. सी. Ann. Proc. Phytochem. Soc. Eur 1980, 17, 271

11. राबर्स, जे. ई., एगर्ट, डब्लू, डब्लू. तथा फ्लास, एच. जी. : Lloydia 1978, 41, 120

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 1, January, 1999.

मृदा वैज्ञानिकों के समक्ष चुनौतियाँ

शिवगोपाल मिश्र

भूतपूर्व निदेशक, शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान,
इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त-अक्टूबर 12, 1998]

सारांश

देश की बढ़ती जनसंख्या को दृष्टि में रखते हुए मृदा-वैज्ञानिकों के समक्ष चुनौती है कि वे मृदा उर्वरता के टिकाऊपन विषयक सन्देहों तथा भ्रमों को दूर करने के लिए किसानों को जैव उर्वरकों तथा वर्मीकम्पोस्ट के उपयोग बतलावें और इनसे सम्बद्ध विस्तृत अध्ययन करें । इसके लिए वे भौतिक रसायनविदों, सूक्ष्मजैविकीविदों आदि का सहयोग लें तथा उपयुक्त एवं स्थायी परीक्षण विधियाँ विकसित करें।

Abstract

A challenge before the Soil Scientists. *By* S. G. Misra, Ex-Director, Sheila Dhar Institute of Soil Sciences, Allahabad University, Allahabad.

In view of the increasing pressure on land to feed the teeming population of our country it is urgently needed that soil scientists shoulder the responsibility of dispelling doubts regarding the sustainability of soil fertility. They should also come forward to guide the farmers regarding right use of fertilisers and vermi-compost. They should also try to work in coalition with Physical chemists and microbiologists to evolve suitable and permanent tests of available plant nutrients.

परिणाम एवं विवेचना

प्रयोग द्वारा प्राप्त परिणामों का विवेचन निम्न प्रकार है :

सारणी 2

उपचार	बुवाई के 15 दिन बाद		बुवाई के 45 दिन बाद	
	पत्तियों की संख्या	ऊँचाई (से.मी. में)	पत्तियों की संख्या	ऊँचाई (से. मी. में)
नियन्त्रण (पानी)	5	8	8	17
नियन्त्रण (मलजल)	6	11	9	20
मसूरी रॉक फास्फेट 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	8	14	11	23
मसूरी रॉक फास्फेट 700 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	10	17	12	28
मसूरी रॉक फास्फेट 400 किग्रा०/हेक्टेयर+पानी	7	10	9	20
मसूरी रॉक फास्फेट 700 किग्रा०/हेक्टेयर+पानी	8	13	10	22

सारणी 2 के प्रेक्षण से स्पष्ट है कि जिन प्लाटों में मलजल अकेले तथा म०रा०फा० के साथ है, उनमें पौधों की ऊँचाई तथा पत्तियों की संख्या पानी+मसूरी रॉक फास्फेट वाले उपचार से अपेक्षाकृत अधिक है। इसका मुख्य कारण मलजल में उपस्थित कार्बनिक पदार्थ है जिससे फास्फोरस की उपलब्धता पर अनुकूल प्रभाव पड़ता है, तथा स्वयं मलजल में नाइट्रोजन, फासफोरस एवं पोटैशियम उपस्थित रहता है।

सारणी 3 से स्पष्ट है कि मलजल में भारी धातुओं की उपस्थिति पानी से सींचे गये प्लाट की अपेक्षा ज्यादा है, तथा मसूरी रॉक फास्फेट की मात्रा बढ़ाने पर क्रोमियम, कॉपर एवं सीसा की मात्रा कम होती जाती है। इसका अर्थ हुआ कि इन सभी का उद्ग्रहण कम होता है। इसका मुख्य कारण मसूरी रॉक फास्फेट में उपस्थित फास्फेट भी हो सकता है जो इन धातुओं के साथ जटिल बनाने में मदद करता है जिससे इनकी उपलब्धता प्रभावित हो जाती है।

सारणी 3

मृदा में भारी धातुओं की उद्ग्रहीत मात्रा
(मलजल एवं मसूरी रॉफ फास्फेट तथा पानी एवं मसूरी रॉफ फास्फेट के प्लाटों का विश्लेषण)

उपचार	भारी धातुयें (पी० पी० एम० में)				
नियन्त्रण (पानी)	जिंक	कॉपर	क्रोमियम	सीसा	कैडमियम
नियन्त्रण (मलजल)	10	9	0.2	1.00	0.04
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	11	10	1.46	1.00	0.078
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	11.5	10.2	1.32	1.11	0.050
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	10.1	10	1.20	0.076	0.070
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	10	8	0.40	1.06	0.68
भ० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	10.1	8	0.19	0.931	0.68

सारणी 4

पत्तियों में भारी धातुओं की मात्रा (पी० पी० एम० में)

उपचार	भारी धातुयें				
	जिंक	कॉपर	क्रोमियम	सीसा	कैडमियम
नियन्त्रण (पानी)	1.50	0.620	0.351	0.426	0.004
नियन्त्रण (मलजल)	1.82	0.723	0.628	0.750	0.008
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	1.83	0.601	0.549	0.658	0.006
म० रा० फा० 700 किग्रा०/हेक्टेयर+मलजल	1.80	0.600	0.530	0.404	0.005
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+पानी	1.50	0.500	0.500	0.390	0.003
म० रा० फा० 400 किग्रा०/हेक्टेयर+पानी	1.50	0.440	0.980	0.305	0.003

सारणी 4 में भारी धातुओं की मात्रा से स्पष्ट है कि म० रा० फा० की बढ़ती हुई मात्रा के साथ धातुओं का उद्ग्रहण कम हुआ। इससे निष्कर्ष यह है कि मृदा में उपलब्ध फासफोरस के द्वारा उद्ग्रहण में कम आई। मसूरी राफ फास्फेट के साथ मृदा में भी इन भारी धातुओं की उपलब्ध मात्रा में कमी आती है इसीलिए इनका उद्ग्रहण भी कम होता है।

अतएव यह निष्कर्ष निकलता है कि वाहित मलजल सिंचित मृदा में यदि फासफोरस युक्त उर्वरकों का प्रयोग किया जाय तो पौधों द्वारार भारी धातुओं का उद्ग्रहण कम किया जा सकता है।

चूँकि प्रयुक्त मलजल में फास्फेट की मात्रा कम है इसलिए अवमल में फास्फेट बढ़ाने में उनमें विद्यमान भांरी धातुएं काफी हद तक अविषैली बन सकती हैं।

सन्दर्भ

1. मिश्रा, एस. जी. श्रीवास्तव, सी. पी., तथा दिनेश मणि, : विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका 1988, **31** (4), 185-189
2. ब्लूमफील्ड, सी., किल्सों, डब्ल्यू. आई. तथा प्रूडेन, जी. *Soil Sci.*, 1976 27, 16-31.
3. स्ट्रिकलैंण्ड, आर. सी., चेने, डब्लू., आर. तथा केमोरेक्स, आर. जे. *Plant and Soil*. 1979, 52, pp. 393-402.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 1, January, 1999.

अर्गट-एल्कैलायडों के निमज्जित किण्वनीय उत्पादन के लिए प्राचलों का इष्टतमीकरण

एस० पी० सिंह, पी० के० चौरसिया

तथा

शान्तिकुमार पाण्डेय

रसायन विज्ञान, मगध विश्वविद्यालय, बोधगया (विहार)

[प्राप्त–जनवरी 28, 1998]

सारांश

उच्च स्तर पर अर्गट ऐल्कलायडों के उत्पादन हेतु इष्टतम प्राचल ज्ञात करने के लिए क्लैविसेप्स पुरपुरिया SS-8 के निमज्जित संवर्धों के साथ अध्ययन किया गया। यह पाया गया कि क्लैसेप्स पुरपुरिया SS-8 की सक्रियता तब अधिकतम होती है जब 25% सुक्रोस के साथ अन्य पोषणीय घटकों को 5.4 पी. एच पर 15 दिनों तक 24° से० ताप पर किण्वित होने दिया जाता है।

Abstract

Optimization of parameters for submerged fermentative production of Ergot alkaloids. *By* S. P. Singh, P. K. Chaurasia and Shanti Kumari Pandey, Department of Chemistry, Magadh University, Bodh-Gaya, (Bihar).

Studies were conducted on submerged culture of *Claviceps purpurea* SS-8 to determine the parameters *e.g.*, hydrogen ion concentration, temperature, and incubation period on ergot alkaloids production of high levels. It has been found that activity of *Claviceps purpurea* SS-8 is maximum when 25% sucrose solution along with other nutritional ingredients of the fungus *Claviceps purpurea* SS-8 is allowed to ferment for 12 days at 24°C by maintaining the pH value of the medium at 5.4

कुछ कार्यकर्ताओं ने[1-6] अर्गट ऐल्कैलायडों के निमज्जित किण्वन के लिए प्राचलों के इष्टतमीकरण के बारे में अध्ययन किया हैं। अर्कामोन इत्यादि[7] ने अर्गट एल्कैलायडों के जैव संश्लेषण का अध्ययन करके सूचित किया कि इष्टतम ताप 23° से० है। इसी तरह अबे[8] एवं सिन्डिश तथा ब्रान[9] ने क्लैविसेप्स पुरपुरिया की इष्टतम वृद्धि के लिए पी. एच 5.6 सूचित किया है। स्पैला[10] ने यह स्थापित किया है कि 14 दिनों की इनक्युबेशन अवधि क्लैविसेप्स पुरपुरिया की सर्वोत्तम सक्रियता के लिए अनुकूल होती है।

इन अध्ययनों को देखते हुए प्रस्तुत अध्ययन निमज्जित अर्गट-एल्कैलायड उत्पादन पर पी. एच, ताप तथा इनक्यूबेशन अवधि का प्रभाव ज्ञात करने की दृष्टि से किया गया।

प्रयोगात्मक

जीव तथा संवर्धन विधियाँ : इस अध्ययन के लिए क्लैविसेप्स पुरपुरिया का प्रभेद SS-8 काम में लाया गया। मूलतः इसे स्क्लेरोटिया से विलगित किया गया जो पेनिसेटम टाइफाइडियम (*Pennisetum typhoideum*) परपोषी से प्राप्त किया गया था।

जीव को जापेक-डाक्स ऐगर स्लांट में रखा गया और 180 चक्र प्रति मिनट की दर से घूर्ण हल्लित्र (rotary shaker) में 24°से० ताप पर हल्लित संवर्द्धों में उगाया गया। ऐगर स्लांट से माइसीलियम का कुछ भाग लेकर द्रव संवर्ध-माध्यम -NL-406 भरे पलिधों में इनाकुलेशन द्वारा प्रभेद को पाला गया[11]। NK-406 संवर्ध माध्यम में निम्नवत् घटक थे (प्रति लीटर आसुत जल में) सुक्रोस (50 ग्राम); सक्सिनिक अम्ल (5.4 ग्राम), यीस्ट निष्कर्ष (3 ग्राम) $MgSO_4.7H_2O$ (0.3 ग्रा.), $FeSO_4.7H_2O$ (0.01 ग्रा.), $ZnSO_4$ $7H_2O$ (0.0044 ग्रा.०। इसके पी- एच को 5.4 पर लाने के लिए पर्याप्त NH_4OH डाला गया। इनाकुलम तैयार करने के लिए जीव को पहले ही हल्लन संवर्धो (Shake Culture) में वर्धित किया गया। जिनमें 100 मिली० माध्यम था। 5-7 दिन बाद 2 मिली० भाग में हुई वृद्धि का उपयोग नवीन माध्यमों को इनाकुलेट करने के लिए किया गया।

उत्पादन माध्यम[6] : किण्वन माध्यम में निम्नलिखित घटक थे (ग्रा०/ली०) :

सुक्रोस (250ग्रा०), सिट्रिक अम्ल (15 ग्रा०), यीस्ट निष्कर्ष (0.1ग्रा०), KH_2PO_4 (0.5 ग्रा०), $MgSO_4$ $7H_2O$ (0.5 ग्रा०) KCl (0.12 ग्रा०), $FeSO_4$. $7H_2O$ (0.007 ग्रा०), $ZnSO_4$. $7H_2O$ (0.006 ग्रा०)

NH_4OH विलयन द्वारा पी०एच को 5.4 पर लाया गया। आसुत जल डालकर आयतन 1000 मिली० बनाया गया। प्रत्येक प्रयोग में अर्गट-एल्कैलाइडों के निमज्जित किण्वनीय उत्पादन के लिए 100 मिली० उत्पादन माध्यम प्रयुक्त किया गया। इस तरह 54 शंक्वाकारपलियों को रुई की ढाठ से बन्द करके 15 पौंड भाप पर आटोक्लेव में 25 – 30 मिनट तक निर्जर्मित किया गया और फिर कमरे के ताप तक ठंडा किया गया। अब समस्त पलिघों को तीन सेटों में (18 पलिघ प्रत्येक में) बांट लिया गया। प्रथम तीन सेटों को पुनः 6 उपसेटों में बांट लिया गया जिनमें से प्रत्येक में तीन तीन पलिघ थे और इनका उपयोग क्रमशः पी- एच, ताप तथा इन्क्यूबेशन अवधि का प्रभाव देखने के लिए किया

गया। अब प्रत्येक पलिघ को क्लैविसेप्स पुरपुरिया SS-8 के 7 दिन पुराने संवर्ध के 2 मिमी० से इनाकुलेट किया गया। इन्हें 180 चक्र प्रति मिनट वाले घूर्णी हल्लित्र में रखा गया।

परीक्षण विधियाँ : विभिन्न अवस्थाओं में निर्मित अर्गट-एल्कैलायडों का रंगमापी निश्चयन किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 में विभिन्न पी-एच, इनक्यूबेशन अवधियों का क्लैविसेप्स पुरपुरिया SS-8 द्वारा अर्गट-एल्कैलाइडों के निमज्जित किण्वनीय उत्पादन पर जो प्रभाव पड़ता है उसे दर्शाया गया है।

सारणी 1

पी-एच, ताप तथा इनक्युबेशन अवधि का सी० पुरपुरिया SS-8 द्वारा अर्गट-एल्कैलायड के निमज्जित किण्वीय उत्पादन पर प्रभाव

सुक्रोस % ग्राम/100ली०	पी०एच	ताप °C	इनक्युबेशन अवधि(दिन)	अर्गट-एल्कैलायडों की संगत उपलब्धि मिग्रा/ली०		
	1	2	3	1	2	3
25	4.5	20	6	788	600	400
25	5.0	22	8	800	715	530
25	5.2	24*	10	825	900§	892
25	5.4*	26	12*	9.10§	860	925§
25	5.6	28	14	614	600	898
25	5.8	30	16	586	545	608

प्रत्येक मान तीन प्रयोगों का माध्य है

* इष्टतम प्राचल अर्गट एल्कैलायडों की इष्टतम उपलब्धि

§ प्रयोगिक विचलन ± 0.5 से 1.5%

सारणी से ज्ञात होता है कि पी-एच 5.4 पर क्लैविसेप्स पुरपुरिया की सक्रियता सर्वाधिक रहती है। अम्लीय माध्यम में अर्गट एल्कैलायडों का उत्पादन सार्थक नहीं हुआ। किन्तु उच्चतर पी- एच पर उत्पादन में लगातार कमी होती गई।

गया। अव प्रत्येक पलिघ को क्लैविसेप्स पुरपुरिया SS-8 के 7 दिन पुराने संवर्ध के 2 मिमी० से इनाकुलेट किया गया। इन्हें 180 चक्र प्रति मिनट वाले घूर्णी हल्लित्र में रखा गया।

परीक्षण विधियाँ : विभिन्न अवस्थाओं में निर्मित अर्गट-एल्कैलायडों का रंगमापी निश्चयन किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 में विभिन्न पी-एच, इनक्यूबेशन अवधियों का क्लैविसेप्स पुरपुरिया SS-8 द्वारा अर्गट-एल्कैलाइडों के निमज्जित किण्वनीय उत्पादन पर जो प्रभाव पड़ता है उसे दर्शाया गया है।

सारणी 1

पी-एच, ताप तथा इनक्युबेशन अवधि का सी० पुरपुरिया SS-8 द्वारा अर्गट-एल्कैलायड के निमज्जित किण्वीय उत्पादन पर प्रभाव

सुक्रोस % ग्राम/100ली०	पी०एच	ताप °C	इनक्युबेशन अवधि(दिन)	अर्गट-एल्कैलायडों की संगत उपलब्धि मिग्रा/ली०		
	1	2	3	1	2	3
25	4.5	20	6	788	600	400
25	5.0	22	8	800	715	530
25	5.2	24*	10	825	900§	892
25	5.4*	26	12*	910§	860	925§
25	5.6	28	14	614	600	898
25	5.8	30	16	586	545	608

प्रत्येक मान तीन प्रयोगों का माध्य है

* इष्टतम प्राचल अर्गट एल्कैलायडों की इष्टतम उपलब्धि

§ प्रयोगिक विचलन ± 0.5 से 1.5%

सारणी से ज्ञात होता है कि पी-एच 5.4 पर क्लैविसेप्स पुरपुरिया की सक्रियता सर्वाधिक रहती है। अम्लीय माध्यम में अर्गट एल्कैलायडों का उत्पादन सार्थक नहीं हुआ। किन्तु उच्चतर पी- एच पर उत्पादन में लगातार कमी होती गई।

इसी तरह 24° से० पर क्लैविसेप्स पुरपुरिया SS-8 की सक्रियता सर्वाधिक रही। कम ताप पर (20-22° से०) उत्पादन उपेक्षणीय रहा किन्तु उच्चतर तापों (26° से 30° से०) पर भी अर्गट-एल्कैलायडों का उत्पादन घटता गया।

सारणी से यह भी पता चलता है कि क्लैविसेप्स पुरपुरिया SS-8 द्वारा अर्गट-एल्कैलायडों के उत्पादन के लिए 12 दिन की इनक्यूबेशन अवधि सर्वाधिक अनुकूल थी। 14 तथा 16 दिनों की इनक्यूबेशन अवधि के बाद अर्गट की उपलब्धि में कोई बढ़ोतरी नहीं हुई।

निर्देश

1. मिजराही, ए., तथा मिलर पी. : Biotechnol Bioeng, 1968 : 10, 102
2. कैस्टैग्नोली, ए. तथा टोनोला, ए. : Proc. 9th Intern. Congr Microbiol, Moscow 1966, पृ०31
3. ऐमिसी, ए. एस., इत्यादि : Experimentia, 1966 : 22, 415.
4. टेबर, डब्लू., ए. : Lloydia, 1969 : 30, 39
5. शास्त्री, के. एस. एम., ओह, ए., तथा अटल, सी. के. : Indian Drugs, 1979 : 16, 88
6. सिंह, एस. पी., समदानी, जी., मेहतो, पी., सी. तथा राठौर, एन., : Asian J. Chem. 1988 : 10, 373
7. अर्कामोन, एफ., इत्यादि : Proc. Roy. Soc., 1961 : B-155, 26
8. एबे, एम. जे. : Agric Chem. Soc., 1946 : 21, 10
9. सिनडिश्च, एस. तथा ब्रॉन, डब्लू., U.S. Patent 2,936, 1960 : 266,
10. स्पैला. सी. Ann. Proc. Phytochem. Soc. Eur 1980, 17, 271
11. राबर्स, जे. ई., एगर्ट, डब्लू, डब्लू. तथा फ्लास, एच. जी. : Lloydia 1978, 41, 120

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 1, January, 1999.

मृदा वैज्ञानिकों के समक्ष चुनौतियाँ

शिवगोपाल मिश्र

भूतपूर्व निदेशक, शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान,
इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त-अक्टूबर 12, 1998]

सारांश

देश की बढ़ती जनसंख्या को दृष्टि में रखते हुए मृदा-वैज्ञानिकों के समक्ष चुनौती है कि वे मृदा उर्वरता के टिकाऊपन विषयक सन्देहों तथा भ्रमों को दूर करने के लिए किसानों को जैव उर्वरकों तथा वर्मीकम्पोस्ट के उपयोग बतलावें और इनसे सम्बद्ध विस्तृत अध्ययन करें । इसके लिए वे भौतिक रसायनविदों, सूक्ष्मजैविकीविदों आदि का सहयोग लें तथा उपयुक्त एवं स्थायी परीक्षण विधियाँ विकसित करें।

Abstract

A challenge before the Soil Scientists. *By* S. G. Misra, Ex-Director, Sheila Dhar Institute of Soil Sciences, Allahabad University, Allahabad.

In view of the increasing pressure on land to feed the teeming population of our country it is urgently needed that soil scientists shoulder the responsibility of dispelling doubts regarding the sustainability of soil fertility. They should also come forward to guide the farmers regarding right use of fertilisers and vermi-compost. They should also try to work in coalition with Physical chemists and microbiologists to evolve suitable and permanent tests of available plant nutrients.

मृदा यानी मिट्टी भारतवासियों के लिए जीवनाधार है। यदि मिट्टी अन्न उत्पन्न करना बन्द कर दे तो लोग भूखों मर जायँ। लेकिन मिट्टी ऐसा कब तक करती रहेगी या कर सकती है ? यदि भूतकाल में उसने अपने वासियों का भरणपोषण किया है तो क्या वह इतनी अनुदार और निष्ठुर बन जावेगी कि लोगों को भूखों मरते देख पावेगी ? सहज भाव में, आप यह कह सकते हैं कि वह निष्ठुर नहीं बनेगी। किन्तु क्या कभी जनसामान्य ने यह जानने का यत्न किया कि मिट्टी पर क्या बीत रही है ? और भविष्य में क्या बीतेगी ?

आइये, जरा वर्तमान परिस्थितियों को ध्यान में रखते हुए भविष्य का चित्र खींचे। सर्वप्रथम हम अपने विशाल देश की विशाल जनसंख्या पर दृष्टिपात करें। ऐसा अनुमान है कि वर्ष 2050 तक इस समय की जनसंख्या जो 97 करोड 60 लाख है, वह बढ़कर 153 करोड 50 लाख हो जावेगी यानी डेढ गुनी से भी अधिक हो जायेगी। स्पष्ट है कि इस समय मिट्टी जितना उत्पन्न कर रही है उससे इतनी बडी जनसंख्या का भरणपोषण तब तक नहीं हो सकेगा जब तक मिट्टी की उर्वरा शक्ति को बढ़ाया न जाय। तो क्या मिट्टी की उर्वरा शक्ति इस हद तक बढ़ाई जा सकती है ? अवश्य। तभी तो भारत सरकार अगले दस वर्षों में अन्नोत्पादन को दुगुना करने की योजना बना रही है।

किन्तु क्या एकमात्र जनसंख्या वृद्धि ही वह कारण है जिससे मिट्टी की उर्वरा शक्ति पर हमें ध्यान देना होगा ? जनसंख्या वृद्धि के साथ-साथ वानस्पतिक आच्छादन की हानि, मिट्टी का ह्रास, प्रदूषण, जलवायु परिवर्तन तथा जैव विविधता की क्षति-ये अन्य अनेक कारण हैं जिनका प्रभाव मिट्टी पर पड़ रहा है। देश के कुछ भागों में सूखा की स्थिति और अन्यों में भयावह बाढ की स्थिति भी उल्लेखनीय कारक हैं जिनसे फसलोत्पादन बुरी तरह प्रभावित होता है और देश के निवासियों को तरह तरह की कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है।

अन्नोत्पादन बढ़ाने के लिए हमारे मृदाविज्ञानी तथा सस्यविज्ञानी प्रयत्नशील रहे हैं और बहुत हद तक उनके ही प्रयत्नों का परिणाम है कि हमारे देश में उत्पादन लगातार बढ़ता गया है। किन्तु यह उत्पादन कृषि यन्त्रों के उपयोग, उर्वरकों तथा कीटनाशियों के प्रचुर प्रयोग और सिंचाई की उन्नत विधियों के इस्तेमाल एवं उत्तम बीज से ही सम्भव हो सका है। किसानों तथा देश के वासियों, राजनेताओं तथा विदेश के पर्यवेक्षकों को अधिक उत्पादन तो दिखा है और सबों ने हमारे देश की कृषि व्यवस्था की भूरि-भूरि प्रशंसा भी की है कि 'हरित क्रान्ति' के द्वारा भारत अन्नोत्पादन में आत्म-निर्भर बन सका है किन्तु मृदा या मिट्टी पर क्या बीती है और आगे क्या बीतेगी इसकी यदि किसी को परख तथा चिन्ता रही है तो वे हमार मृदाविज्ञानी ही रहे हैं। वे देश के किसानों को, जो पृथ्वी पुत्र कहे जाते हैं, घबडवाना नहीं चाहते किन्तु प्रयोगशालाओं में नई-नई शोधों की आवश्यकता पर बल देते हुए वे अपने अन्त-स्तल में अत्यधिक चिन्तित हैं। वे अपना दुखडा रोवें भी तो किससे। वे मिट्टी की आन्तरिक संरचना से अवगत हैं। उन्हें इसका पूर्वानुमान है कि हमारी मिट्टियों की भौतिक, रासायनिक तथा सूक्ष्म जैविक दशा लगातार बिगडती जा रही है-इसे यों कह लीजिये कि मिट्टी का स्वास्थ्य बिगडता जा रहा है, वह रुग्ण होती जा रही है। वह अपनी सामान्य दशा में यानी निरुज नहीं है।

मिट्टी की हालत बिगडने से सभी फसलों की उपज में कमी आई है। इसका मोटा अनुमान सारणी-1 से प्रकट हो जावेगा।[1]

सारणी 1

फसलें	प्रतिशत क्षति
गेहूँ	3.9-6.4
धान	2.7-4.7
जौ	4.5-7.0
चना	5.6-7.8
ज्वार	5.7-7.6
बाजरा	6.8-8.4
मक्का	3.2-4.9
गन्ना	4.5-7.9
मूँगफली	2.8-8.5
सरसों	5.8-8.5
अन्य फसलें	4.0-6.3
औसत	4.0-6.3

किन्तु मिट्टी को केवल खाद्यान्न फसलें ही नहीं उत्पन्न करनी हैं, उसे देश की रेशे, चारे तथा फल और साग-भाजी की जरूरतें भी पूरी करनी पड़ेंगी। स्पष्ट है कि मृदा विज्ञानी जिस मिट्टी परीक्षण पर इतना निर्भर कर रहे हैं और किसानों को मिट्टी जाँच कराने के लिए प्रेरित करते रहे हैं, अब उस मिट्टी परीक्षण को अधिक व्यापक यानी उदार बनाना होगा। अभी तक जिन तीन तत्वों NPK तथा सूक्ष्म मात्रिक तत्वों की उपलब्धता पर बल दिया जाता रहा है और विभिन्न प्रयोगशालाओं में विभिन्न क्षेत्रों की मिट्टियों के लिए उपयुक्त परीक्षण विधियां विकसित की जाती रही हैं, उनमें संशोधन करना होगा जिससे नवीन फसलों की आवश्यताओं को समझ कर उनकी पूर्ति के उपाय किये जा सकें। यह स्मरण रखना होगा कि कुछ साग-भाजियों की उपज प्रति हेक्टर 100-150 टन हो सकती है। ऐसी स्थिति में इनकी सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की आवश्यकता बढ़ेगी। अभी तक Cu, Zn, Fe, B आदि की जितनी मात्रा की संस्तुति की जाती रही है उसमे संशोधन अत्यावश्यक होगा।

हम पोषक तत्वों की बात कर रहे हैं तो आइये आज की नवीन प्रवृत्तियों पर दृष्टिपात करें।

भारत में कुल कृष्य क्षेत्रफल 143 मिलियन हेक्टेयर है। यह सम्भव नहीं है कि समस्त राज्यों की सभी मिट्टियों में सन्तुलित उर्वरकों का प्रयोग किया जा सके। इसका मुख्य कारण छोटे किसानों की अपनी-अपनी आर्थिक वाध्यताएँ हैं और उनके परम्परागत विश्वास हैं। फिर भी इतना तो स्पष्ट है कि नाइट्रोजन, फास्फोरस तथा पोटैशियम युक्त उर्वरकों को मिट्टी में डाल दिये जाने के बाद कुछ समस्याएँ उत्पन्न होती हैं जिनका समाधान मृदा वैज्ञानिकों को ही ढूँढना है। उदाहरणार्थ, फास्फेटी उर्वरक जब खेतों में डाले जाते हैं तो मिट्टियाँ अपनी किस्म के अनुसार फास्फेट को निश्चल बना देती हैं जिससे डाले गये फास्फेटी उर्वरक का अधिकांश मिट्टियों में ही रहा आता है। किन्तु यह निश्चल किया गया फास्फेट अगली फसलों के लिए उपलब्ध होगा कि नहीं इसकी जानकारी सैद्धान्तिक रूप से मृदा वैज्ञानिकों को है किन्तु किन फसलों के लिए इसे उपलब्ध कराया जा सकता है, इसको व्यावहारिक रूप प्रदान किया जाना शेष है। उर्वरकों पर वर्षानुवर्ष खर्च करने के बजाय इस निश्चल अंश को उपलब्ध बनाने की भरसक कोशिशें की जानी चाहिए।

इसी तरह पोटैशिक उर्वरकों की भी उपलब्धता सुनिश्चित की जानी चाहिए।

सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की न्यूनता से बचने के लिए मिट्टियों में उनका परीक्षण अत्यावश्यक होगा। इन तत्वों के छिडकाव या मिट्टी में मिला देने मात्र से लक्ष्य प्राप्त नहीं किया जा सकता। बारम्बार छिडकाव या मिट्टी में डाले जान से इनका संचय हो सकता है और ये लाभ पहुँचाने के बजाय विषाक्त बन सकते हैं।

किन्तु सन्तुलित उर्कों या सूक्ष्ममात्रिक तत्वों के प्रयोग की सलाह से मृदावैज्ञानकों के कर्तव्य की इतिश्री नहीं हो जाती है। उन्हें देश की पारम्परिक कृषि पद्धति को जिसमें कार्बनिक खादों का प्रयोग अनिवार्य था, वरीयता देनी होगी। हमारे देश में ही नहीं, विदेशों में कार्बनिक फार्मिगं (Organic farming) अपनाई जाती रही है। अकार्बनिक उर्वरकों के लगातार प्रयोग से उत्पन्न कतिपय समस्याओं के समाधान में कार्बनिक खादों की संस्तुति विकल्प के रूप में की जा रही है। इतना ही नहीं, "जैव उर्वरकों" का उत्पादन एवं प्रयोग भी सुझाया जाने लगा है। इसका कारण यही है कि कृत्रिम उर्वरकों की आपूर्ति न हो पाने तथा इन उर्वरकों से हो रही हानियों के विकल्प के रूप में ही कार्बनिक फार्मिंग या जैव उर्वरकों के प्रयोग पर बल दिया जा रहा है। यह बहुत ही सामयिक कदम है। किन्तु किसानों को इनके सही प्रयोग की विधि बताने एवं समय से उपलब्ध कराये जाने की आवश्यकता है। न केवल नीलहरित शैवाल (BGA), अपितु राइजोबियम, ऐजोटोबैक्टर जैसे सूक्ष्मजीवाणुओं के कल्चर किसानों को उपलब्ध कराये जा रहे हैं। फिर भी, सावधानी बरते जाने की आवश्यकता है। इन सूक्ष्मजीवाणुओं की देशी प्रजातियों या क्षेत्रीय प्रजातियों को ही मिट्टियों से विलग करके उनका प्रयोग अधिक तर्कपूर्ण कदम होगा। सम्प्रति कतिपय नकली कम्पनियाँ छद्म कल्चरों का बाजारों में बेच रही हैं। इनसे आगाह करने के लिए सूक्ष्मजीवविज्ञानियों को इन कल्चरों को तत्काल तथा प्रभावी परीक्षण करना होगा और किसानों को सावधान भी करना होगा क्योंकि यदि एक बार इन नकली कल्चरों के दुष्परिणाम देखने को मिलेंगे या इनसे कोई लाभ नहीं मिलेगा तो किसान बिचक जावेंगे। इसलिए कृषि विस्तार सेवा में संलग्न कार्यकर्ताओं को सतर्कता बरतनी होगी।

जैसा कि सर्वविदित है मिट्टी निर्जीव या निष्क्रिय माध्यम नहीं है। इसमें असंख्य सूक्ष्मजीवाणु, कवक, कीट, निमैटोड तथा केंचुए निवास करते हैं। ये सभी मिट्टी के घटकों में उपयोगी परिवर्तन लाते रहते हैं और इस तरह पौधों तथा फसलों की वृद्धि को नियन्त्रित करते हैं। किन्तु इन विभिन्न मृदा प्राणियों की जनसंख्या मृदा के ताप, मृदा की आर्द्रता, मृदा के गठन द्वारा प्रभावित होती है। यही कारण है कि शीत प्रदेशों में उष्ण प्रदेशों की अपेक्षा कम तीव्रता से मिट्टी के घटकों में परिवर्तन होते हैं। हमारा देश उष्ण है अतः हमारे कृषि विज्ञानियों को उच्च ताप पर घटित होने वाली जैव क्रियाओं का मृदा उर्वरता पर जो प्रभाव होगा, उसका सूक्ष्मातिसूक्ष्म अध्ययन करना चाहिए। दुर्भाग्यवश अभी तक इस तरह का कोई प्रामाणिक अध्ययन नहीं हो पाया। इसमें न केवल मृदा विज्ञानियों की भूमिका महत्वपूर्ण है अपितु पादपरोग विज्ञानी, कीट विज्ञानी तथा जैव विज्ञानी समुदाय को मिल-जुल कर टोली में समन्वित शोध कार्य करना होगा। इसी दिशा में मिट्टी को प्रदूषित करने वाले कारकों से भी मुक्ति पाने के लिए अधिक मैत्रीपूर्ण सूक्ष्मजीवों को संवर्धित करने की जरूरत पड़ेगी।

सारणी 2

भारी धातुओं का केंचुओं की संख्या पर हानिकर प्रभाव

प्लाट संख्या	नियंत्रण	भारी धातुएँ			
		Cu	Pb	Cd	Cr
प्लाट 1	24	21	17	20	11
प्लाट 2	13	11	5	5	2
प्लाट 3	19	16	9	11	7
प्लाट 4	23	19	20	12	13
प्लाट 5	27	22	21	16	13

टिप्पणी- 5 लीटर 100 ppm. सान्द्रता वाले लवण विलयन के रूप में भारी धातुएँ डाली गई।

आजकल मृदा उत्पादकता तथा मृदा उर्वरता का टिकाऊपना (sustainability) आम नारा बना हुआ है। 'हरित क्रान्ति' के फलस्वरूप गेहूँ तथा धान की बौनी प्रजातियों की लोकप्रियता किसानों के बीच बढ़ी और विगत 30 वर्षों से उसका लाभ उन्होंने उठाया किन्तु धीरे-धीरे मृदाविज्ञानियों ने अनुभव किया कि उर्वरकों तथा कीटनाशियों के लगातार प्रयोग करने तथा काफी सिंचाई करने से कुछ दुष्परिणाम भी फलीभूत हो रहे हैं। इसके विपरीत जिन क्षेत्रों में उर्वरकों, कीटनाशियों या सिंचाई साधनों में कमी की गई उनमें उत्पादकता बढ़ नहीं पाई। कहीं-कहीं तो घट गई। ऐसा टिकाऊपन किस काम का ? इसलिए यह ज्ञात करने की आवश्यकता है कि आखिरकार वे कौन से कारक हैं जो दीर्घकाल तक अपना प्रभाव डाल सकते हैं।

एक बात और। आज भी ऊसरों, बंजरों तथा पर्ती भूमियों, जलमग्न क्षेत्रों एवं पोषण-न्यूनता वाले क्षेत्रों के विषय में परस्पर विरोधी मत व्यक्त किये जा रहे हैं। आखिर क्या कारण है इसका ? सही-सही सांख्यिकीय ऑकडों का न होना दुर्भाग्य का विषय है। कभी सफलता की बढ़ी चढ़ी बातों ने, तो कभी असफलता के निराधार आरोपों ने भूमि विषयक मुद्दों को राजनीतिक रंग प्रदान कर रखा है। मृदा विज्ञानियों को संकल्पपूर्वक सही ऑकडों को उपलब्ध कराने तथ अपनी उपलब्धियों को बेलाग जनता के समक्ष प्रस्तुत करने का साहस दिखलाना होगा। किसी तरह के राजनीतिक दबाव से देश की भूमि उर्वरता विषयक जानकारी सन्देहास्पद बनी रहेगी। उन्हें चाहिए कि उर्वरता विषयक मानचित्र बाजारों में उपलब्ध करा दें जिन्हें जनता देख सके, विद्यार्थी शुरू से ही उनका अध्ययन कर सकें और उनमें यदि कोई फेर-बदल हो तो इन संशोधनों को भी समय-समय पर प्रकाश में लाया जाय। इन मानचित्रों को राष्ट्रीय महत्व प्रदान किया जाय।

साठ-सत्तर के दशक में हरी खादों, मिश्रित फसलों पर अत्यधिक बल दिया गया था। किन्तु कुछ काल बाद उनकी चर्चा छोड दी गई। 'हरित क्रान्ति' के शुभारम्भ के साथ एक ही फसल (mono culture) के लगातार बोये-काटे जाने का चक्र शुरू हुआ। किन्तु इस तरह की पद्धति से कालान्तर में मृदा-उर्वरता पर क्या बीतेगी, इसका अभी तक कोई मूल्यांकन नहीं हुआ। जिस टिकाऊपन की डींग हाँकी जा रही है, उसके लिए यह अति महत्वपूर्ण जानकारी होगी। यदि भारतीय किसानों ने हजारों वर्षों से मिश्रित फसलें उगाकर उर्वरता को टिकाऊ बना रखा तो अब उसमें क्या कठिनाई हो रही है ? कहीं एक फसल उगाने की पद्धति से भारतीय कृषि चौपट तो नहीं हो जावेगी ? कहीं कीटों के आक्रमण से इस एक फसल के विनष्ट होने से उत्पादन शून्य तो नहीं हो जावेगा ? इन बातों का क्रमबद्ध अध्ययन एवं आकलन आवश्यक है।

मृदा विज्ञानियों का उत्तरदायित्व इसलिए भी बढ़ेगा कि भोजन तथा कपड़े के लिए आगामी वर्षों में भी मिट्टी से होने वाली उपज पर ही निर्भर रहना होगा। समुद्रों या जलाशयों से थोडी ही मात्रा में मछली जैसी खाद्य वस्तुएँ उपलब्ध हो सकेंगी। मिट्टी अतीत काल से मनुष्यों एवं पशुओं के जीवन के लिए उपयोगी वस्तुएं प्रदान करती आई है और आगे भी करती रहेगी। अतः मिट्टी के कृष्य क्षेत्रफल को यदि बढाया न जाय तो उसे घटने भी न दिया जाय। एक ओर तमाम मिट्टियाँ निष्प्राण हो रही हैं, उनमें क्षरण हो रहा है या वे जलमग्न हो रही हैं तो दूसरी ओर यातायात मार्गों या आवास के लिए उर्वर मिट्टियों में लगातार अतिक्रमण किया जा रहा है। जिस गति से शहरी क्षेत्रों का विस्तार हो रहा है, उससे आस-पास की उपजाऊ मिट्टी जिससे प्रचुर अन्न उत्पन्न हो रहा था, ईंट-पत्थर के आवासों से घिर रही है। यही नहीं, बहुत सी बंजर-पर्ती भूमि शहरी मलवे से निरन्तर पाटी जा रही है। शहरी आवास व्यवस्था के लिए पहले से अनुर्वरित मिट्टियाँ-ऊसर या बंजर मिट्टियाँ-नापसंद की रही हैं। आवास एवं पर्यटन विभाग मिट्टी की अनदेखी कर रहे हैं। किसान भी क्षणिक अर्थिक लोभ के कारण अपनी उर्वर जमीने बेंच रहे हैं। उन्हें इसकी पीड़ा नहीं है कि उनकी धरती, उनकी भूमि, उनकी मिट्टी-मिट्टी नहीं अक्षय भण्डार-कौडी के मोल बिक रहा है। उनकी उर्वर मिट्टी का यह प्रखंड सदा के लिए खेती किये जाने से विलग हो रहा है। जब तक मिट्टी के प्रति मानवीय संवेदना अनुभव नहीं की जावेगी, तब तक छोटे स्वार्थ के लिए बहुत बडी बलि दी जाती रहेगी। हमें तो वे छोटे-छोटे किसान

अच्छे लगते हैं जो अपनी भूमि को सर्वस्व गँवा कर भी नहीं छोडते। वे अपने प्राण भी दे सकते हैं एक भूमि-खण्ड के लिए। उनका मिट्टी प्रेम 'चिपको आन्दोलन' के कार्यकर्ताओं जैसा है जो वृक्ष न कटने देने के लिए प्राण देने को तत्पर रहते थे। यह मिट्टी-प्रेम ही देश की भावी पीढ़ी को बचा सकेगा। मृदा विज्ञानी मृदा उर्वरता की महत्ता को बारम्बार समझा कर उन्हें प्रेरणा प्रदान कर सकते हैं। भूमिहीनों को भूमि दिलाना उतना सार्थक कदम नहीं होगा जितना कि भूमिधरों को उनकी भूमि बनाये रखने और आवास-योजना बनाने वालों को यह हिदायत देने की कि वे उर्वर भूमि पर कदम न रखें। आवास समस्या से आवश्यक एवं महत्वपूर्ण है खाद्य समस्या। खाद्य समस्या का एकमात्र हल है कि उर्वर भूमि को प्राणों से अधिक प्यारी मान कर उसकी सभी प्रकार से सुरक्षा। आज की उर्वर भूमि कल अनुर्वर बन सकती है और बंजर भूमियों का इसी तरह से ही सृजन हुआ है। किन्तु बुद्धिमानी इसी में है कि जितनी उर्वर भूमि है उसे बचाकर उसको उर्वर बनाये रखने के लिए सतत प्रयत्नशील रहा जाय। कृषि के टिकाऊपने का मूल मन्त्र यही है। इसके लिए किन किन साधनों को जुटाया जाय, कौन-कौन से उपाय किये जायँ-इनकी सूची बनाना मृदाविज्ञानियों का काम होगा।

किन्तु क्या अकेला मृदाविज्ञानी मिट्टी की सारी समस्याओं का समाधान खोज सकता है ? मिट्टी इतना जटिल तन्त्र है जिसको कृत्रिम ढंग से तैयार नहीं किया जा सकता, भले ही इसकी संरचना एवं इसके कार्यों का अध्ययन किया जा सके। ऐसे अध्ययन के लिए रसायन, भौतिकी तथा जीवविज्ञान के मूलभूत सिद्धान्तों की जानकारी ही नहीं अपितु उनमें पारंगत होना आवश्यक है। किन्तु क्या एक व्यक्ति में इतनी क्षमता है कि वह इन सभी सिद्धान्तों में पटु हो ? उत्तर होगा, आज के विशिष्टीकरण (Specialization) के युग में न तो यह सम्भव है, न ही ऐसी आशा की जानी चाहिए। वे दिन बीत चुके जब रसायन या भौतिकी के शोधकर्ता क्रमशः मृदा विज्ञान के क्षेत्र में अभूतपूर्व योगदान देते रहे हैं। आज मृदाविज्ञानी को भौतिक रसायन की उतनी दक्षता प्राप्त नहीं है, न ही किसी कृषि संस्थान में भौतिक रसायन के इतने उत्कृष्ट ज्ञान प्रदान किये जाने के साधन उपलब्ध हैं। मृदाविज्ञान में क्षेत्र-प्रयोगों पर बल है, विभिन्न उपचारों के फलस्वरूप प्राप्त परिणाम हैं किन्तु उनकी सैद्धान्तिक विवेचना के लिए पर्याप्त आधार नहीं है। आवश्यकता है ऐसी संकल्पनाओं के विकसित किये जाने की, जिनको प्राप्त परिणामों को व्याख्यायित करने में प्रयुक्त किया जा सके। इसलिए चाहे मृदा विज्ञान हो या मृदा विज्ञानी-दोनों ही में वैज्ञानिक विचारों को अधिकाधिक स्थान मिलना चाहिए। इसके लिए सबसे सरल उपाय होगा कि विज्ञान की विभिन्न शाखाओं के शोधकर्ता एवं विशेषज्ञ मिल जुल कर, टोली में, मृदा के विभिन्न पहलुओं पर शोध करें और उनको खेतों में ले जाने के लिए हर सम्भव प्रयास करें।

हो सकता है कि इन वैज्ञानिकों को अपने शोध परिणामों को कृषकों तक पहुंचाने में राजनैतिक अडंगे आवें किन्तु इसका हल सम्भव न हो, ऐसी बात नहीं। राष्ट्-हित के लिए वैज्ञानिक गण सदा से त्याग करते आये हैं और आगे भी उन्हें त्याग करने होंगे विज्ञान का मार्ग ही ऐसा है। यह सत्य का मार्ग है किन्तु है अति कंटकाकीर्ण। उन्हें यह स्पष्ट घोषित करना होगा कि अल्पकालिक लाभों की तुलना में दीर्घकालिक हानियाँ अधिक विचारणीय हैं। यदि वे योजना-आयोग को अपने अनुमान और सिफारिशें पेश करें तथा उन्हें पूर्ण रूप में स्वीकृत कराकर कार्यान्वयित करा सकें तो किसानों और धरती दोनों का कल्याण हो सकेगा। अब मृदाविज्ञानियों के पास सुदूर संवेदन प्रणाली उपलब्ध है

जिससे वे विभिन्न प्रकार की मिट्टियों तथा जलसंसाधनों का विस्तृत विवरण प्राप्त कर सकते हैं। स्वतन्त्रता प्राप्ति के पचास वर्षों के बाद भी यदि मृदाविज्ञानी अपनी क्षमताओं को नहीं पहचानते और उनका प्रदर्शन नहीं करते तो फिर अब कब करेंगे ? उनकी सारी खोजें कागज के गट्ठरों में बन्द पडी न रहें, इसका उन्हें ध्यान रखना होगा। यदि देशहित में कडवी बात कहनी पडे तो उसे कहने में संकोच या भय नहीं होना चाहिए। उन्हें अपने क्षेत्र-प्रयोगों में किसानों का सहयोग लेना चाहिए। उन्हें अपने पुष्ट परिणामों को किसानों के लिए प्रदर्शन द्वारा सुलभ कराना होगा। अब तमाम कृषि-मेले लगाये जाते हैं जिनमें किसानों को सामयिक कृषि तकनीकों से परिचित कराया जाता है। किन्तु अभी केवल गिने-चुने किसान ही कृषि मेलों में सम्मिलित होते हैं। उन्हें अधिक से अधिक संख्या में आकर लाभ उठाना चाहिए।

यद्यपि कृषि की शिक्षा विद्यालय स्तर से दी जाती रही है किन्तु इस शिक्षा का उद्देश्य स्नातकों को इस ज्ञान का उपयोग अपने खेतों में जाकर कृषि कर्म करना नहीं रहा है। उन्हें तो सरकारी नौकरी की अभिलाषा रही है जहाँ वे मिट्टी से कटकर फाइलों में खो जायँ, और भूल जायँ उस मिट्टी को, जिसके नाम पर उन्होंने डिग्री प्राप्त की है। मिट्टी की शिक्षा सबां के लिए अनिवार्य होनी चाहिए। सबों को खेतों में काम करने के लिए प्रशिक्षित किया जाना चाहिए। सबों को कृषि विषयक नवीनतम जानकारी दी जानी जाहिए और नूतनतम तकनीकों से अवगत कराया जाना चाहिए। कृषि विषयक पत्रिकाओं एवं पुस्तकों को गाँव-गाँव तक पहुँचना चाहिए। प्राइमरी पाठशाला का शिक्षक भी उन्हें पढे-समझे, यह लक्ष्य होना चाहिए।

अभी कुछेक बातें कहनी शेष हैं। विगत दस बारह वर्षों से पर्यावरण प्रदूषण पर विशेष ध्यान गया है। चाहे जल प्रदूषण हो या स्थल प्रदूषण—दोनों की मार मिट्टी को सहनी पड़ती है। यदि स्थल पर कूड़ा-करकट का अम्बार लगता है, यदि स्थल पर जल भराव होता है या औद्योगिक विषैले वहिर्स्रावों को लाकर मिट्टी में छोड़ दिया जता है तो मिट्टी ही प्रभावति होती है। यही नहीं, शहरी मल-जल या अवपंक भी मिट्टियों के मत्थे पड़ता है। इस प्रदूषण से मिट्टी पर क्या बीतती है, इसे मिट्टी ही जानती है। उसकी सारी व्यवस्था अस्तव्यस्त हो जाती है, उसे साँस लेना दूभर हो जाता है, उसे अपने सूक्ष्मजीवों से हाथ गँवाना पड़ता है। यदि कुछ हाथ लगता है तो विषाक्त वातावरण और स्वयं की रोगग्रस्तता। चाहे मल-जल हो या म्यूनिसिपल कूडा-करकट, सबों से मिट्टी में अनिश्चित मात्रा में प्रूदषणकारी पदार्थ आ मिलते हैं। इनमें से कार्बनिक यौगिकों के अतिरिक्ति सारे तत्व—विशेषतः भारी धातुएँ, जिनमें ताँबा, जिंक, कैडमियम, लेड, क्रोमियम मुख्य हैं-मिट्टी को विषाक्त बनाते है। ऐसी प्रदूषित मिट्टी में उगने वाली फसलें इन भारी धातुओं से युक्त होने के कारण अन्ततोगत्वा मनुष्यों तथा पशुओं के लिए घातक सिद्ध होती हैं। हमारे देश के किसान कूड़ाकरकट या मल को बिना मूल्य चुकाये मुफ्त में पा लेते हैं और इन पदार्थों की थोड़ी बहुत उपादेयता इस दृष्टि से है कि इनके द्वारा मिट्टियों के एक महत्वपूर्ण घटक-कार्बनिक पदार्थ-की पूर्ति होती रहती है। किन्तु इस एक घटक के अलावा जितनी भी विषैली धातुएँ हैं वे मिट्टी में निरन्तर संचित होती रहती हैं और अन्तोगत्वा वे ऐसी मिट्टी को जन्म देती हैं जो फसलों के लिए सर्वथा हानिकारक होती है। अभी भी हमारे मृदाविज्ञानी बढ़ते हुए मृदा प्रदूषण के प्रति सतर्क नहीं हुए। अभी केवल प्रयोगशालालओं में मृदा प्रदूषकों की गतिविधियों, उनसे

होने वाले सम्भावित दुष्परिणामों का अध्ययन हुआ है। अभी तक शायद ही कोई ऐसी प्रविधि सुझाई गई हो जिससे मृदा प्रदूषण से राहत दिलाई जा सके।

सारणी 3
वर्मीकम्पोस्ट की विभिन्न मात्राओं का उपज पर प्रभाव

उपचार (प्रति हेक्टेयर)	पालक		शलजम		चौलाई	
	ग्रा०	% वृद्धि	ग्रा०	% वृद्धि	ग्रा०	% वृद्धि
नियन्त्रण	122.5	–	875	–	1107.66	–
10 टन वर्मीकम्पोस्ट	239.0	95.10	1875	114.28	1832.66	65.45
20 टन वर्मीकम्पोस्ट	298.0	143.26	2125	142.85	2341.66	111.40

इधर कुछ वर्षों से कूड़ा करकट जैसे प्रदूषकों को लाभप्रद बनाने की दिशा में वर्मीकल्चर और वर्मीकम्पोस्टिंग पर प्रयोग हुए हैं। इनसे अच्छे परिणाम भी प्राप्त हुए है (सारणी 3)[3] फलतः बड़े पैमाने पर केंचुओं की ऐसी प्रजातियों का संवर्धन किया जा रहा है जो सभी प्रकार के कूडे कचरे को उपयोगी कम्पोष्ट में बदल दें। यह वर्मीकम्पोष्ट कार्बनिक खाद का ही कार्य नहीं करेगी, अपितु उगायी जाने वाली फसलों की गुणवत्ता में भी सुधार लावेगी। सम्प्रति पुणें में वर्मीकम्पोस्टिंग तैयार करने एवं उसके प्रयोग से होने वाले लाभों पर गहन अध्ययन चल रहा है। हमने भी शीलाधर मृदा शोध संस्थान इलाहाबाद में वर्मीकल्चर तथा वर्मीकम्पोस्टिंग के विषय में शोध कार्य सम्पन्न कराया है। हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे हैं कि मिट्टी जो कि केंचुओं की जन्मस्थली एवं कार्यस्थली है- प्रदूषित होती है तो केंचुओं की संख्या घटती जाती है (सारणी 2)। इसलिए अलग से केंचुओं को संवर्धित करके कूडाकरकट को वर्मीकम्पोष्ट में बदला जाय और इस वर्मीकपम्पोष्ट का प्रयोग किया जाय तो यह मृदा में कार्बनिक पदार्थ की पूर्ति का उत्तम साधन बन सकती है।

निर्देश

1. Down to Earth, 15 अक्टूबर 1996.

2. उमाशंकर मिश्र, डी. फिल. थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1997.

3. संजीव त्रिपाठी, डी. फिल. थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1999.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 1, January, 1999.

अपारंपरिक ऊर्जा का एक स्रोत—हरी पत्तियां

भरत मिश्रा

भौतिकी विभाग, महात्मा गांधी चित्रकूट ग्रामोदय विश्वविद्यालय, चित्रकूट, सतना (म० प्र०)

तथा

कपूरमल जैन एवं अनुज हुण्डैत

भौतिक विभाग, उच्च उत्कृष्टता संस्थान, कोलार रोड, भोपाल (म० प्र०)

[प्राप्त-अक्टूबर 1, 1998]

सारांश

पेड़-पौधों की हरी पत्तियों से विद्युत प्राप्त करना एक अभिनव प्रयोग है। प्रस्तुत शोधपत्र में विभिन्न पौधों की हरी पत्तियों का उपयोग बैटरी के निर्माण में करते हुये बैटरी से संबंधित विभिन्न मानकों का अध्ययन किया गया है। हरी पत्ती-बैटरी से लगभग 1.5 वोल्ट का विभव तथा 347 μW से 1183 μW तक की अधिकतम विद्युतशक्ति प्राप्त होती है। परिणामों से यह स्पष्ट कि हरी पत्ती-बैटरी से विद्युत उत्पादन में पत्ती का प्रकार, सतह जैव कोशिका घनत्व, मोटाई के अतिरिक्त पत्ती में निहित पानी की मात्रा महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं।

Abstract

A source of non convetional energy : Green Leaves. By Bharat Mishra, Department of Physics, Mahatma Gandhi Chitrakoot Gramodaya Vishwavidyalaya, Chitrakoot, Satana (M. P.) and Kapoor Mal Jain & Anuj Hundet, Department of Physics, Institute for Excellence in Higher Education , Kaliyasot Dam, Kolar Road, Bhopal (M. P.)

Generating electricity from the green leaves of plant is an innovative idea. This research paper deals with the study of different parameters related to battery, while utilising the green leaves of various plants in fabrication of battery. The leaf-battery gives approximately 1.5 volts and electrical power ranging from 347 μW to 1183 μW. It is clear from the analysis of results, that the

type of leaves, surface cell density and thickness of the leaves, apart from the water content, play important role in the generation of electricity from the green leaves.

इलेक्ट्रॉनिक जगत में होने वाले नित नये अनुसंधानों के कारण आज ऐसे उपकरण प्रचलन में बढ़ रहे हैं, जो अत्यन्त अल्प ऊर्जा खपत करते हैं। एल. सी. डी. युक्त कैलकुलेटर, घडियां, पाकेट वीडियोगेम इत्यादि की ऊर्जा खपत माइक्रो वाट स्तर की होती है। ऐसे में वैज्ञानिकों का ध्यान अल्प ऊर्जा स्रोत के अनुसंधान की ओर जाना स्वाभाविक ही है। हरी पत्ती बैटरी या बायो ई. एम. एफ. -डिवाइस (बेड) इसी दिशा में एक कदम है।[1-6]

हरी पत्ती बैटरी का निर्माण पेड़-पौधों की ताजी हरी पत्तियों के द्वारा किया जाता है। हरी पत्ती का उपयोग बैटरियों में इलेक्ट्रोलाइट की तरह किया जाता है परन्तु जैव कोशिकाओं की उपस्थिति तथा उनमें संचालित जैव-प्रक्रियाओं के कारण हरी पत्ती, प्रचलित इलेक्ट्रोलाइट से सर्वथा भिन्न होती है। हरी पत्ती बैटरी से प्राप्त विद्युत उत्पादन में वोल्टाइक के साथ-साथ जैविक योगदान भी होता है जैविक योगदान लगभग 65± 10 प्रतिशत होता है।[5]

सर्वविदित है कि पेड़-पौधे सूर्य के प्रकाश से जीवन पाते हैं। इन पेड़-पौधों में क्लोरोफिल नामक एक जटिल रासायनिक पदार्थ पाया जाता है। पत्तियों की हरियाली इसी क्लोरोफिल के कारण होती है। यही क्लोरोफिल रासायनिक विधि द्वारा सौर ऊर्जा को सोखकर तथा वातावरण से पानी एवं कार्बन डाईआक्साइड लेकर सेल्यूलोस एवं शर्करा के रूप में भोजन उपलब्ध कराकर पेड़-पौधों को जीवन-दायिनी शक्ति देता है। इस प्रक्रिया को प्रकाश-संश्लेषण कहते हैं। हरी पत्ती एक जैव निकाय है। किसी भी जैव निकाय की सबसे छोटी इकाई जैव कोशिका कहलाती है, जो बडी ही कार्यकुशलता से कई जटिल रसायनों का निर्माण करती रहती है। ये कोशिकायें अपने में जैव निकाय के लिये आवश्यक ऊर्जा को रासायनिक ऊर्जा के रूप में भण्डारित करके भी रखती हैं। जैव निकाय इस रासायनिक ऊर्जा का उपयोग अपनी अपनी वृद्धि तथा विविध जैव गतिविधियों के संचालन में करते हैं। [7] इनमें से कई क्रियाओं के दौरान आवेशित कणों का स्थानान्तरण होता है, जो कि "जैव-विद्युत" को जन्म देता है। जैव जगत में उपलब्ध इस "जैव-विद्युत" को विशेष रूप से ट्रैप करके आज के इस इलेकट्रॉनिक युग में प्रचलित इलेक्ट्रॉनिक उपकरणों के लिए एक अत्यंत आवश्यक अल्प ऊर्जा का स्रोत विकसित किया जा सकता है।

प्रयोगात्मक

हमने अपने प्रयोगों के लिये ग्रेफाइट और मैग्नीशियम इलेक्ट्रोड का चयन किया। ग्रेफाइट प्लेट इंडिया लि०, कलकत्ता तथा मैग्नीशियम इलेक्ट्रोड गौपद केमिकल्स प्रा० लि०, चंदौसी (उ. प्र.) से प्राप्त किया गया। इलेक्ट्रोड के 4 सेमी.^{2} आकार का काटकर, सर्वप्रथम आसुत जल से तथा फिर उन्हें ऐसीटोन से धोया गया। सूखे इलेक्ट्रोड को फिर एमरी पेपर (रेगमाल) से घिसकर उसकी सतह को अत्यन्त चिकना एवं समतल बनाया गया। परिपथ संयोजन हेतु इलेक्ट्रोड को क्रोकोडाइल क्लिप तथा सुचालक तारों की मदद से जोड़ा गया था।

हरी पत्ती से बैटरी बनाना

प्रयोगार्थ निम्नलिखित पौधों की पत्तियों को चुना गया :

		संक्षिप्त में
1. अगेव-ड्यूरफ (*Agave-duraf*)	...	AD
2. अगेव-इंडिका (*Agave-indica*)	...	AI
3. अगेव-मार्जिनेटा (*Agae-margineta*)	...	AM
4. अगेव-अमेरिकाना (*Agae-americana*)	...	AR
5. फरकेरिया (*Furcarea*)	...	FUR
6. फाइकस-इलास्टिका (रबरप्लांट) (*Ficus-elastica*)	...	FE
7. अपुंसिया-(नागफनी) (*Opuntia*)	...	OP
8. यूका-एलोयफोलिया (*Yucca-aloifolia*)	...	YA

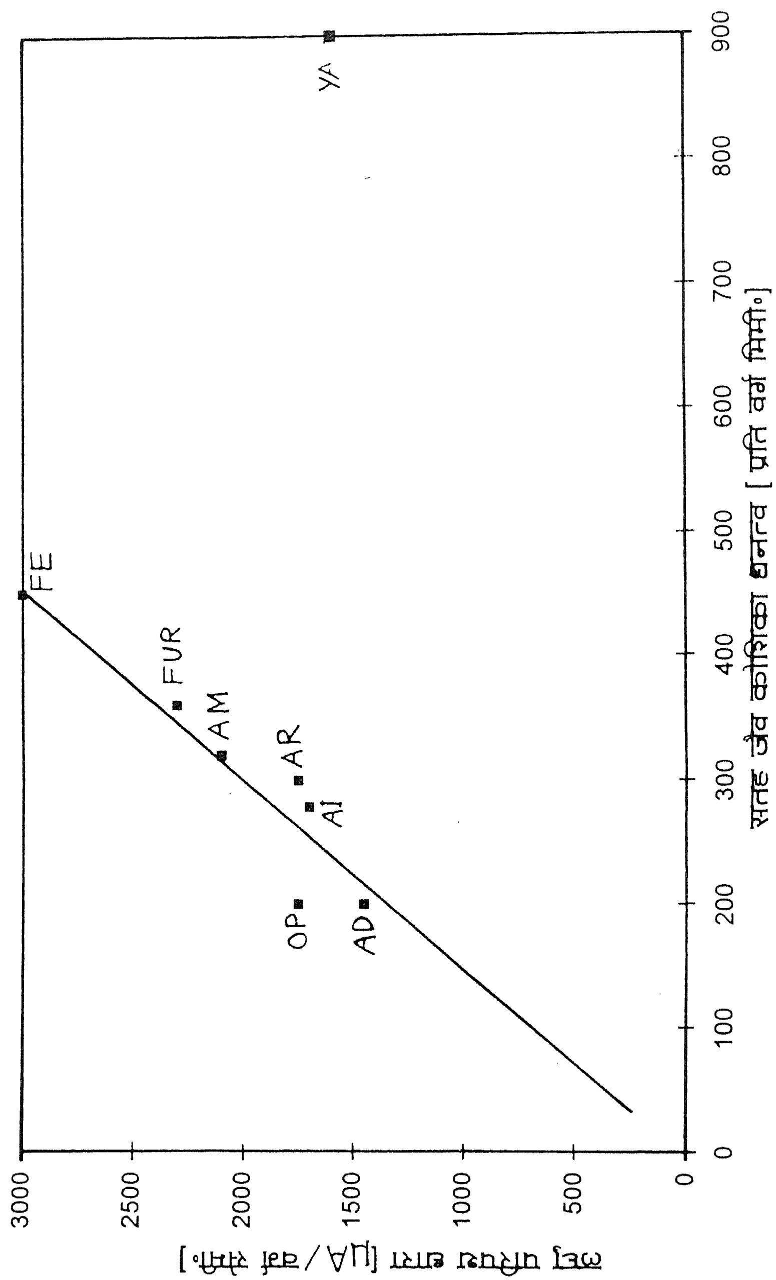
पौधे से तोड़ी गई ताजी हरी पत्ती को सर्वप्रथम आसुत जल से धोया गया, इसके पश्चात् उसके दोनों ओर की ऊपरी परत (एपिडर्मिस) को तेज धार वाली ब्लेड से हटा दिया गया। ऊपरी परत हटाई हुई लगभग समान मोटाई वाले भाग की पत्ती को 4 से. मी.^{2} आकार का काटकर, उपर्युक्त वर्णित इलेक्ट्रोड युग्म (ग्रेफाइट और मैग्नीशियम) के बीच रखकर, कुचालक स्प्रिंग क्लिप से दबा दिया गया। यहाँ यह सावधानी रखी गई कि इलेक्ट्रोड युग्म पत्ती पर एकसमान दाब बनायें तथा वे एक दूसरे को कहीं स्पर्श न करें। इस प्रकार हरी पत्ती से बैटरी तैयार हो जाती है। प्रयोगों के दौरान प्रत्येक मापन के लिये नई बनाई गयी पत्ती-बैटरी उपयोग में लायी गई।

मापन

सभी वैद्युत मापन एच. आई. एल. डिजिटल पैनल मीटर श्रेणी 2201 द्वारा किये गये। पत्ती की मोटाई के मापन 0.005 सेमी० अल्पतमांक वाले स्क्रूगेज से किया गया, भार का मापन रासायनिक तुला (के० राय एण्ड क०, बनारस) द्वारा तथा पत्ती की सतह जैव कोशिका घनत्व का मापन ओलम्पस माइक्रोस्कोप द्वारा किया गया। सभी प्रेक्षण 25± 2°C ताप पर किये गये।

परिणाम तथा विवेचना

विभिन्न पत्तियों की बनाई गई बैटरियों के प्रयोगों से प्राप्त परिणाम को सारणी 1 तथा 2 एवं में तथा चित्र क्रमांक 1-7 में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 1 : पत्तियों के सतह जैव कोशिका घनत्व और लघु परिपथ धारा के बीच सम्बन्ध।

सारणी 1

हरी पत्ती बैटरी के भौतिक प्राचल

(आकार 4 वर्ग सेमी०, इलेक्ट्रोड : ग्रेफाइट एवं मेग्नीशियम, कमरे का ताप 25± 2^{0}C)

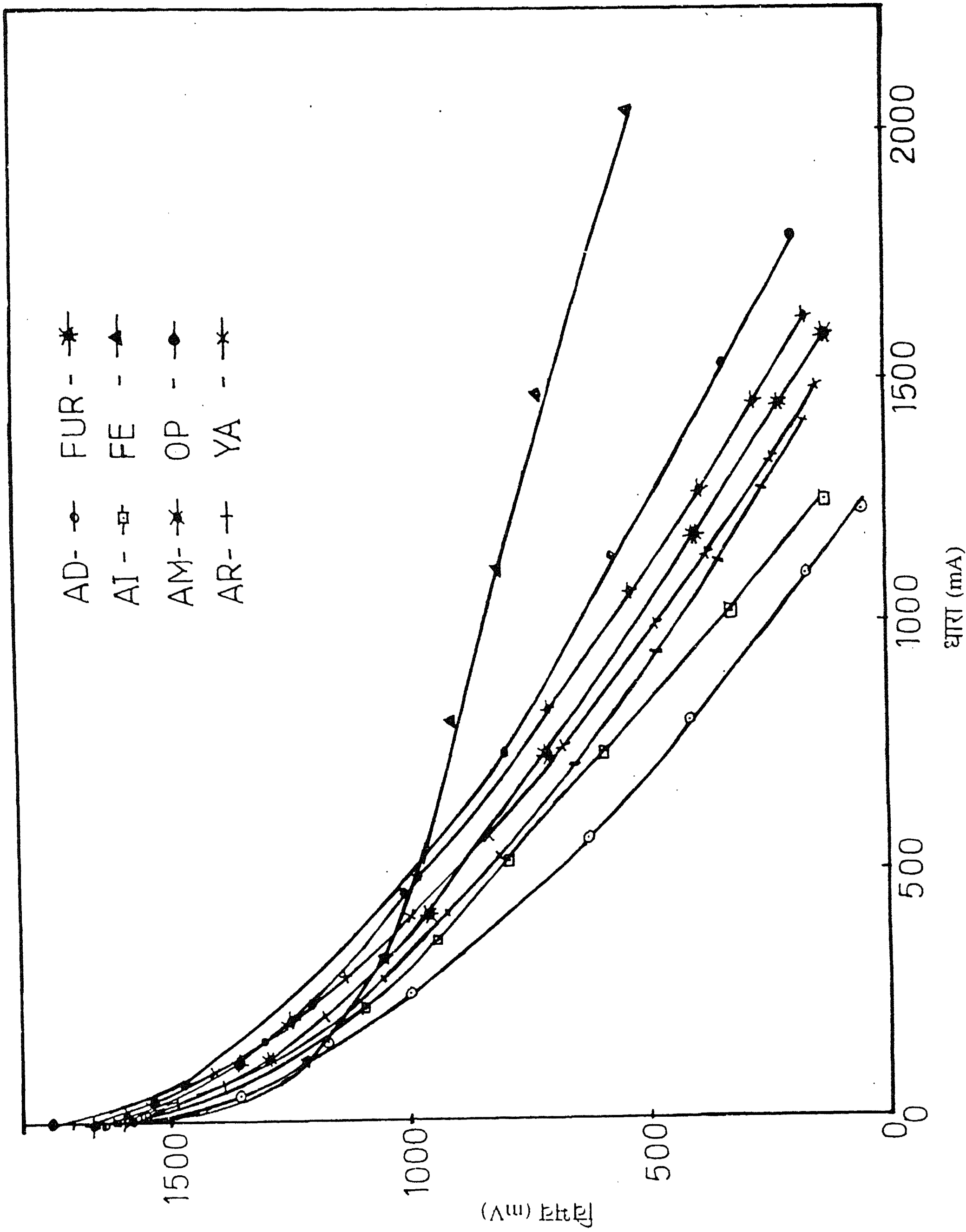
पत्ती का नाम	लगभग मोटाई सेमी०	भार मिलीग्राम/ वर्ग सेमी०	शुष्क/नम भार अनुपात	सतह जैव कोशिका घनत्व प्रति वर्ग मिलीमीटर
अगेव-ड्यूरा (*Agave-duraf*)	0.760	401	0.095	200 ± 30
अगेव-इंडिका (*Agave-indica*)	0.391	316	0.172	270 ± 30
अगेव-मार्जिनेटा (*Agave-margineta*)	0.421	361	0.137	320 ± 30
अगेव-अमेरिकाना (*Agave-americana*)	0.216	157	0.165	300 ± 30
फरकेरिया (*Furcarea*)	0.260	183	0.130	360 ± 30
फाइकस-इलास्टिका (*Ficus-elastica*)	0.080	66	0.288	450 ± 50
ओपुंसिया (*Opuntia*)	1.525	1260	0.850	200 ± 30
यूका-एलोयफोलिया (*Yucca-aloifolia*)	0.254	139	0.291	900 ± 100

चित्र 1 से स्पष्ट है कि हरी पत्ती बैटरी के लघु परिपथ धारा का मान पत्ती के सतह जैव कोशिका घनत्व बढ़ने के साथ-साथ बढ़ता है। केवल नागफनी तथा तथा यूकाएलोयफोलिया यहां अलग परिणाम प्रदर्शित करती हैं। नागफनी साधारण पत्ती न होकर तने का परिवर्धित रूप होती है, जबकि यूकाएलोयफोलिया पत्ती में पेलीसेड जैव कोशिका पाई जाती है, जिनके बीच वायु स्थान कम होता है, जो श्वसन को कम करता है। शेष सभी पत्तियों में मिजोफिल जैव कोशिका देखी गई, जिनके बीच वायु स्थान अधिक होता है, जो श्वसन दर को बढ़ाता है। यही कारण हो सकता है कि ऐसी पत्तियाँ जिनमें मिजोफिल जैव कोशिका होती है, अधिक लघु परिपथ धारा देती हैं। विभिन्न पत्ती बैटरियों से प्राप्त खुले परिपथ विभव का जैव कोशिका के प्रकार से कोई मेल नहीं खाता है।

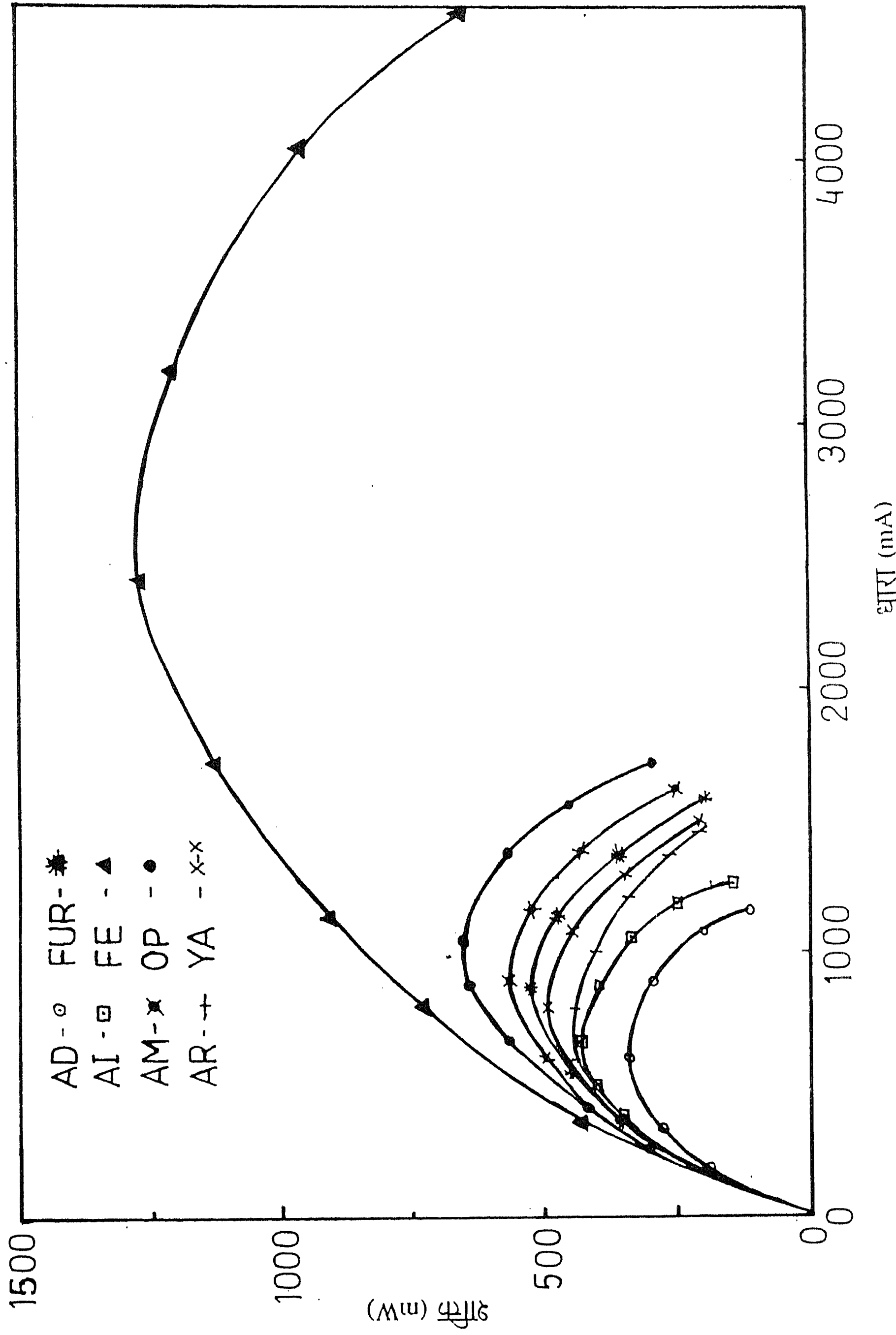
सारणी 2 : विभिन्न हरी पत्ती बैटरियों के भौतिक प्राचल

(आकार 4 वर्ग सेमी०, इलेक्ट्रोड : ग्रेफाइट एवं मेग्नीशियम, कमरे का ताप 25 ± 2^oC)

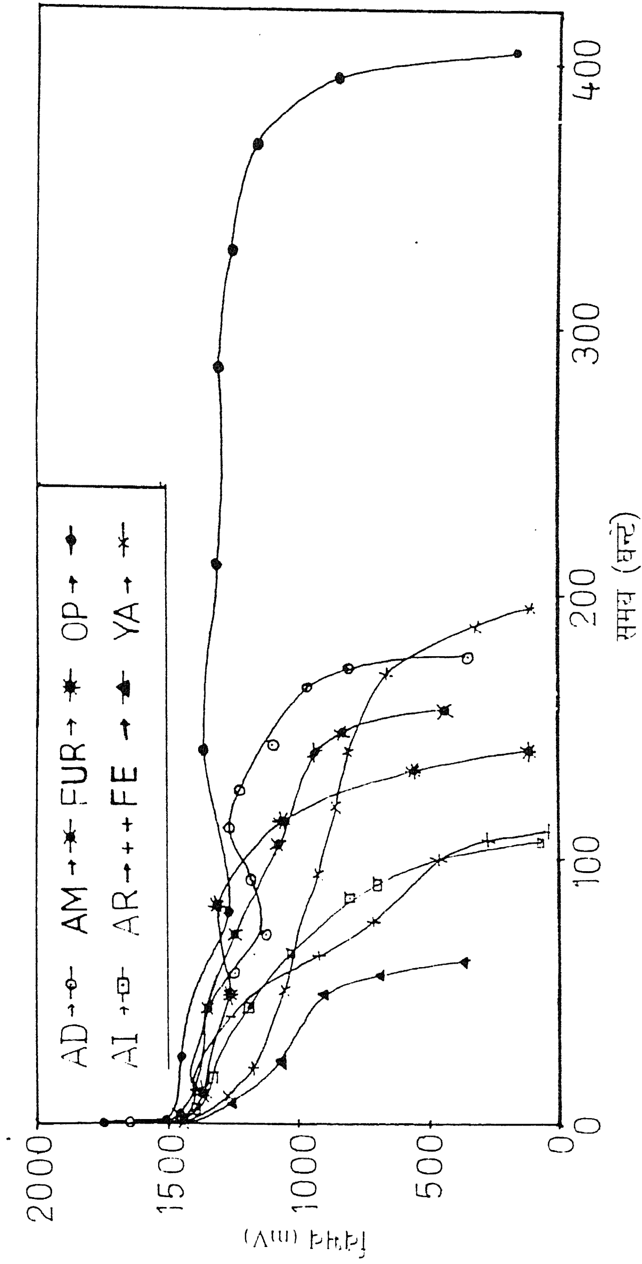
पत्ती का नाम	खुला परिपथ विभव	बंद परिपथ धारा	अधिकतम विद्युत शक्ति	अधिकतम विद्युत शक्ति के संगत धारा	आन्तरिक प्रतिरोध	100 kΩ प्रतिरोध के संगत विसर्जन आंकड़ा		
						जीवनकाल	औसत धारा	उपयोगी ऊर्जा घनत्व
	(±50 mV)	(±50 μA)	(μWA)	(μA)	(kΩ)	(hrs)	(μA)	$W.hr/m^2$
अगेव-ड्यूराफ (*Agave-duraf*)	1640	1450	347	561	1.3–5.0	172	11	6.15
अगेव-इंडिका (*Agave-indica*)	1560	1700	452	635	1.0–3.0	91	11.5	2.81
अगेव-मार्जिनेटा (*Agave-margineta*)	1662	2100	574	902	1.0–3.0	151	12	5.46
अगेव-अमेरिकाना (*Agave-americana*)	1650	1650	458	643	1.0–3.0	98	11	2.78
फरकेरिया (*Furcarea*)	1550	2370	536	825	0.8–6.0	132	12	4.68
फाइकस-इलास्टिका (*Ficus-elastica*)	1595	3000	1183	2320	0.3–6.0	56	10.5	1.42
ओपुंनसिया (*Opuntia*)	1750	1750	660	1035	0.8–6.0	398	12.5	15.87
यूका-एलोयफोलिया (*Yucca-aloifolia*)	1605	1600	756	706	0.9–3.0	176	10.0	4.41



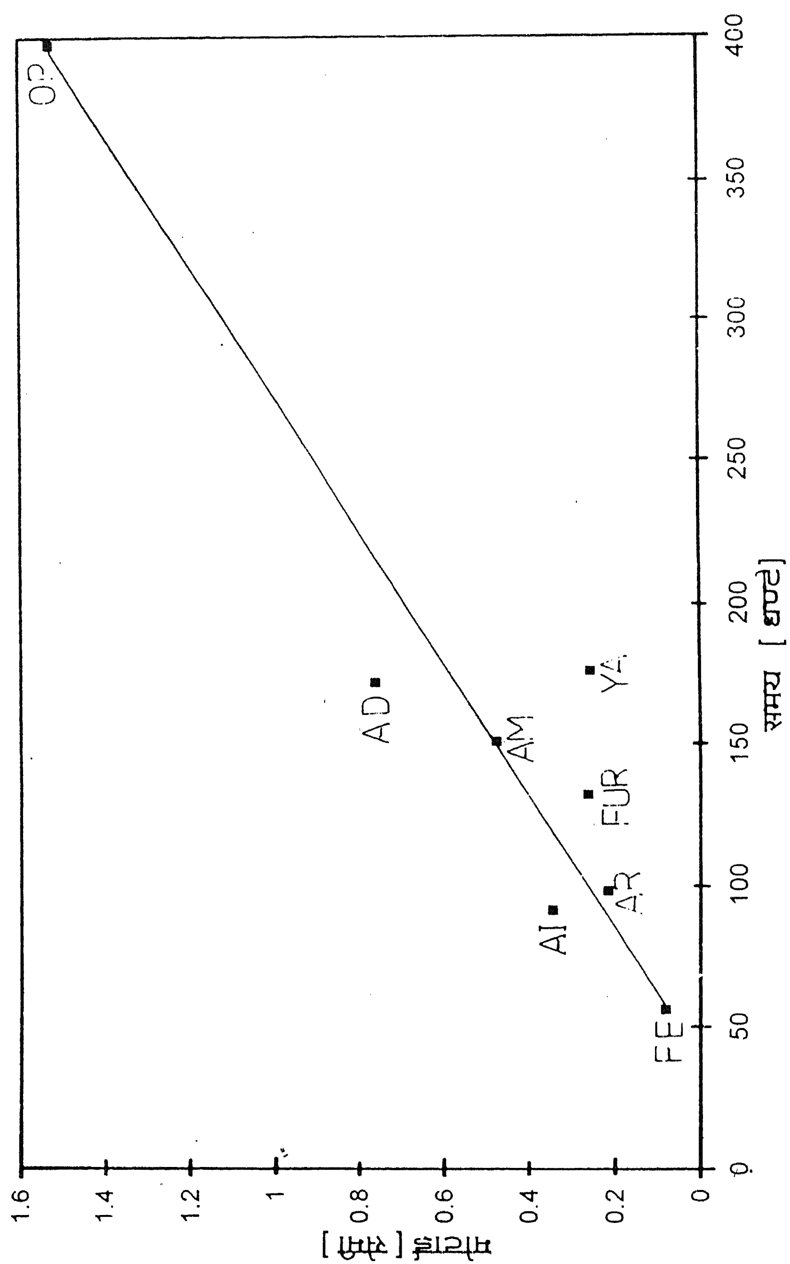
चित्र 2 : विभिन्न हरी पत्ती बैटरी का धारा-विभव अभिलाक्षिक वक्र।



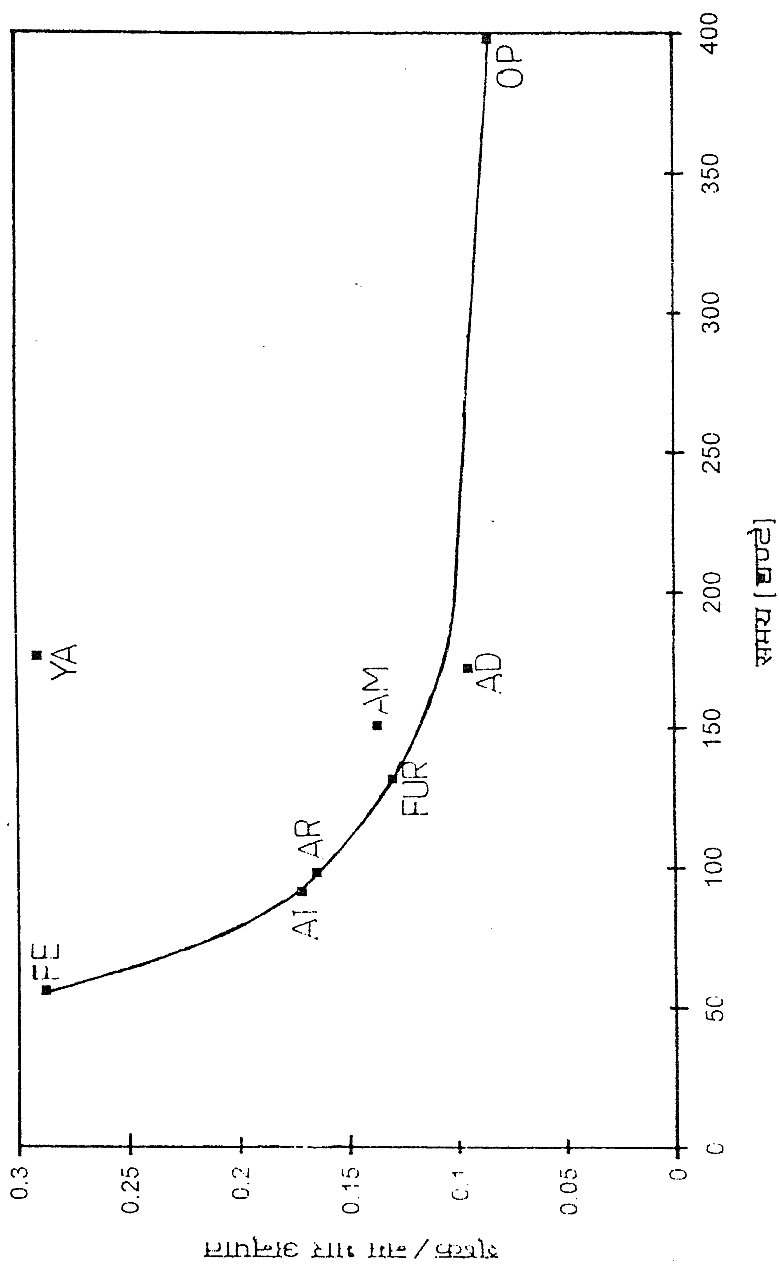
चित्र 3 : विभिन्न हरी पत्ती बैटरी का धारा-शक्ति अभिलाक्षिक वक्र।



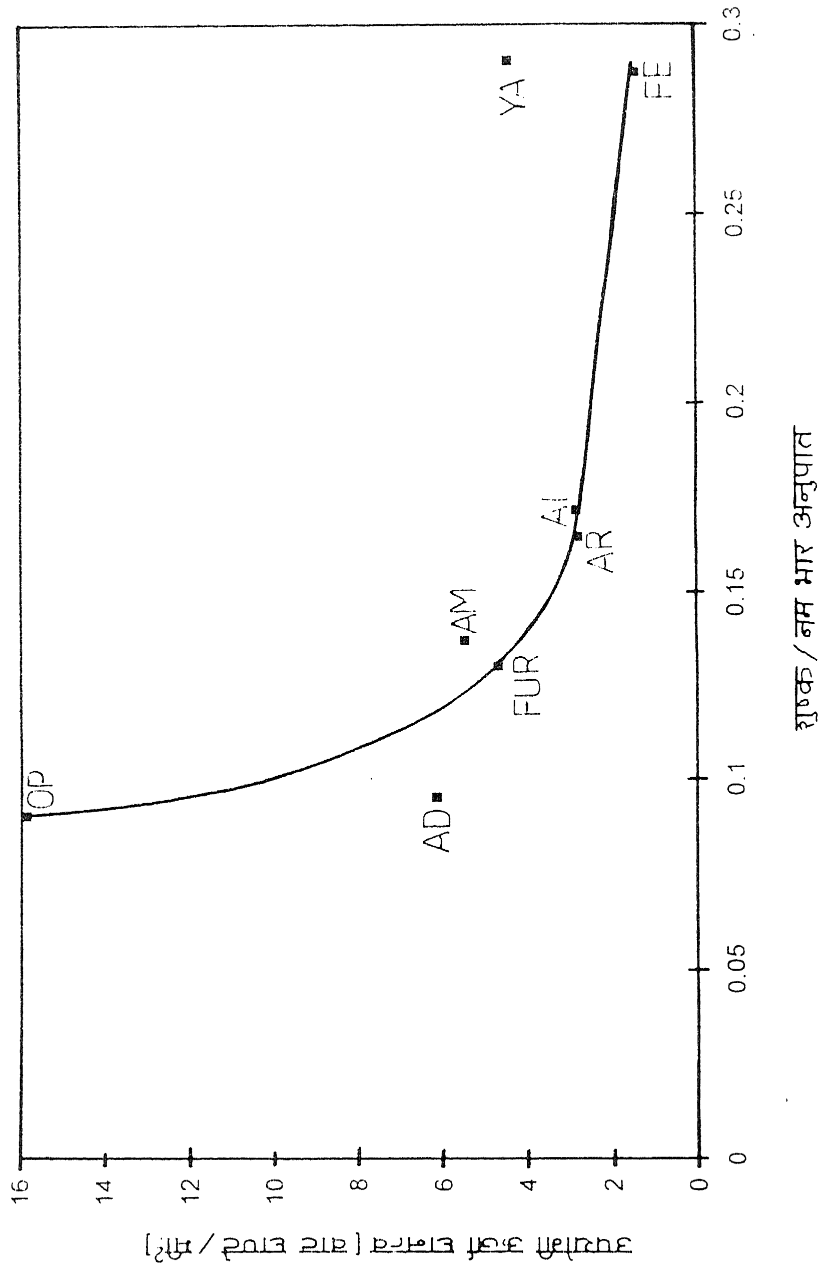
चित्र 4 : विभिन्न हरी पत्ती का बैटरी विसर्जन-अभिलाक्षणिक चक्र।



चित्र 5 : विभिन्न हरी पत्ती की मोटाई तथा जीवनकाल के बीच सम्बन्ध।



चित्र 6 : विभिन्न पत्ती के शुष्क/नम भार अनुपात तथा जीवनकाल के बीच सम्बन्ध।



चित्र 7 : हरी पत्ती बैटरी तथा उसके उपयोगी ऊर्जा घनत्व के बीच सम्बन्ध।

इन विभिन्न बैटरियों के धारा-विभव, धारा-शक्ति, एवं विभव समय अभिलाक्षणिक वक्र के अध्ययन से यह ज्ञात होता है कि हरी पत्ती बैटरी से उच्च प्रतिरोध पर लगभग स्थिर धारा प्रवाहित होती है, जबकि निम्न प्रतिरोध पर परिपथ धारा का मान तेजी से बढ़ता है, परन्तु बैटरी विभव का मान स्थिर नहीं रहता है तथा धारा बढ़ने के साथ-साथ तेजी से घटता है (चित्र- 2)। यह इस तथ्य को इंगित करता है कि निम्न प्रतिरोध पर बैटरी इलक्ट्रोडों पर ध्रुवण होता है। बैटरियों के धारा शक्ति वक्र से अधिकतम विद्युत पत्ती शक्ति लगभग 1118 μW रबर प्लांट की तथा सबसे कम 360 μW अगेव इयूराफ की पत्ती से प्राप्त हुई (चित्र-3) जो पुनः हरी पत्ती बैटरी से विद्युत उत्पादन में जैव कोशिका की भूमिका को सिद्ध करता है, अर्थात् पत्ती का सतह जैव कोशिका घनत्व बढ़ने पर बैटरी से प्राप्त होने वाली अधिकतम विद्युत शक्ति बढ़ती है। यहां पुनः नागफनी और युकाएलोयफोलिया अलग परिणाम देते हैं, जिसका कारण पहले दिया जा चुका है।

हमें बैटरी का जीवन काल विसर्जन (डिस्चार्ज) अभिलाक्षणिक वक्र से प्राप्त होता है। हमने विभिन्न हरी पत्ती बैटरियों को 100 kΩ स्थिर प्रतिरोध पर विसर्जन किया। प्राप्त परिणाम चित्र-4 में दर्शाये गये हैं। नागफनी पत्ती सबसे अधिक समय, 398 घण्टे तक जबकि रबर प्लांट की बैटरी सबसे कम समय 156 घण्टे, तक चली। बैटरी के अपने प्रारंभिक वोल्टेज से एक तिहाई वोल्टेज तक पहुँचने को हमने उसका जीवनकाल माना है। इससे यह स्पष्ट होता है कि ऐसी पत्तियाँ जिनकी मोटाई अधिक होती हैं, जो सरस हों तथा जिनके अन्दर पानी की मात्रा अधिक हो, अधिक समय तक कार्य करती हैं व अधिक उपयोगी ऊर्जा भी प्रदान करती हैं। नागफनी की पत्ती की मोटाई 1.525 सेमी० तथा शुष्क/नम भार अनुपात 0.09 तथा इसका जीवन काल 398 घण्टे प्राप्त हुआ जबकि रबरप्लांट की पत्ती के लिये यही मान क्रमशः 0.080 सेमी०, 0.288 तथा 56 घण्टे मिले। इस परिणाम (चित्र-5 तथा 6) के आधार पर हम कह सकते हैं कि मोटी पत्ती, जिसका शुष्क/नम भार अनुपात 0.1 से कम हो, जो जीरोफिटिक हो, बैटरी निर्माण के लिए अन्य पत्तियों की तुलना में बेहतर होती है। इस तथ्य की पुष्टि बैटरियों के उपयोगी ऊर्जा घनत्व अध्ययन (चित्र- 7) से भी होती है, जिसमें नागफनी की बैटरी के लिये यह मान 15.87 वाट-घण्टे/मी.^{2} तथा रबरप्लांट की पत्ती के लिये यही मान 1.42 वाट-घण्टे/मी.^{2} प्राप्त किया गया।

निष्कर्ष

प्रयोगों से प्राप्त परिणामों के आधार पर इस निष्कर्ष पर पहुँचा जा सकता है कि प्रायोगिक रूप से किसी भी पौधे की हरी पत्ती से बैटरी का निर्माण किया जा सकता है, परन्तु बेहतर परिणाम हेतु उन्हीं पत्तियों का चयन करना चाहिये, जो जीरोफिटिक हो तथा जिसमें मिजोफिल जैव कोशिका उपस्थित हो, जिनकी सतह जैव कोशिका घनत्व अधिक हो, जो मोटी व सरसों, साथ ही उनका शुष्क/नम भार अनुपात 0.1 से कम हो।

निर्देश

1. जैन के० एम०, हुण्डेत ए०, अब्राहम, एस० तथा निगम, एच० एल० : Bull. Electrochem. 1987, 3, 359.

2. जैन, के० एम० तथा अब्राहम, एस० : Trans. SAEST, 1988, 23, 379.

3. जैन, के० एम० तथा हुण्डैत, ए० : Pak. J. Sci. & Indus. Res. 1988, 31, 803-806.

4. जैन, के० एम० तथा हुण्डैत, ए० : Pak. J. Sci. & Indus. Res. 1988, 31, 690.

5. हुण्डैत, अनुज; त्रिपाठी, आशुतोष; जैन, के० एम० तथा भटनागर, एस० पी० : National Academy Science Letters, 1989, 12, 347.

6. हुण्डैत, अनुज; "On the development of Low-power sources using natural bio-system," पी-एच० डी० थीसिस, अवधेश प्रताप सिंह विश्वविद्यालय, रीवाँ (म० प्र०), 1994.

7. श्रीवास्तव, एच० एस०, ''प्लांट फिजियोलॉजी'' रस्तोगी एण्ड कम्पनी, मेरठ, 1996.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 1, January, 1999.

कोबाल्ट (II) एवं कॉपर (II) के विषम धात्विक मिश्रित (β–डाइ कीटोनेट एवं एराइलआक्साइड) संकुलों का संश्लेषण तथा गुणधर्मों का अध्ययन

राज कुमार दुबे

रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त - जुलाई 27, 1998]

सारांश

कोबाल्ट (II) एवं कॉपर (II) के विषमधात्विक-मिश्रित संकुलों का संश्लेषण एवं उनके गुणधर्मों का अध्ययन तत्व विश्लेषण, स्पेक्ट्रामिति (अवरक्त एवं दृश्य वर्ण क्रम) तथा चुम्बकीय-प्रवृत्ति के मापन द्वारा किया गया। प्रमुख विषम-धात्विक व्युत्पन्नों के अणुभार का निश्चयन का अध्ययन भी किया गया।

Abstract

Synthesis and characterization of Novel hetero-metal complexes of Cobat (II) and Copper (II) containing β-diketonate and Aryloxide moieties. *By* Raj Kumar Dubey, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad - 211002 (U.P).

Novel heterometal comlexes of cobalt (II) and copper (II) of the types [(RCOCHCOR) M{Zr_2 ($OPr^i)_9$} and [(OAr) {M Zr_2 ($OPr^i)_9$}] [M = Co (II) and Cu(II); R = R′ = Me (Ia and Ia′); R = R′ = CF_3 (Ib and Ib′); R = Me, R′ = CF_3 (Ic and I′c); OAr = 2, 6-$Me_2C_6H_3$ (IIa and IIa′) ; 3, 5 $Me_2C_6H_3$ (IIb and II′ b) p–Cl C_6H_4 (IIc and IIc′)] have been prepared and characterized by elemental analyses, spectral (i.r., visible and e.s.r.) and magnetic susceptibility measurements as well as molecular weight

determinations. The alcoholysis reaction of a few novel derivatives of copper (II) was also carried out.

प्रस्तावना

पश्च संक्रमण धातुओं (later 3 'd' transition metals) के विषम-धात्विक संकुल, जो कि $\{Zr_2 (OPri)_9\}^-$, $\{Nb (OPr^i)_6\}^-$ $\{Ta (OP^i)_6\}^-$ तथा $\{Al (OPri)_4\}^-$ लिगेन्ड द्वारा निर्मित हैं, का संश्लेषण एवं अभिलक्षण [1 - 9] पहले ही किया जा चुका है। इस प्रकार के व्युत्पन्न, विषम त्रि-एवं चतुः -धात्विक संकुलों [10, 11] के अच्छे पूर्णगामी सिद्ध हुए हैं तथा साल-जेल विधि द्वारा आक्साइड सेरेमिक[12-19] बनाने के लिये उपर्युक्त यौगिकों को प्रयुक्त किया। मिश्रित-हैलाइड/एल्काक्साइड यौगिकों की क्रियाशीलता, [फिनाक्सो (एक दन्तुर) तथा β-डाईकिटोनेटो (द्विदंतुर) लिगेन्ड के प्रति} का अध्ययन[20,21] अभी तक सीमित ही रहा है। टेट्रा ऐल्काक्सी ऐल्यूमिनेट, $\{Al (OPri)_4\}$ उभय दन्तुर (ambidentate लिगैन्ड की भाँति व्यवहार करता है। यथा– क्रोमियम (III)[22] के साथ द्विदन्तुर (bidentate) एवं हैफनियम (IV)[23] के साथ त्रिदन्तुर (tridentate) की तरह व्यवहार करता है। हाल ही में, एक क्लोराइड विषम धात्विक संकुल, $[(M\text{-}Cl)\ Cd\ \{Zr_2 (OPri)_9\}]^2$ [24] की X-किरण संरचना में पाया गया कि $\{Zr_2 (OPri)_9)\}$ समूह चतुर्दन्तुर (tetradentate) लिगैंड की तरह आचरण करता है और दो कैडमियम के मध्य क्लोराइड सेतु बनाने से कैडमियम विकृत अष्ठफलकीय संरचना को प्राप्त होता है।

उपर्युक्त परिणामों को ध्यान में रखते हुऐ, पश्च '3d' संक्रमण धातुओं और डाइजर्कोनियम-इनिया-आइसो प्रोपाक्साइड, $\{Zr_2 (OPri)_9\}$ द्वारा निर्मित, क्लोराइड- प्रतिस्थापन β -डाइकीटोन और फीनाक्सो - समूहों द्वारा किया गया।

प्रस्तुत प्रपत्र में कुछ नवीन β- डाइकीटोनेटो तथा कोबाल्ट (II) एवं कापर (II) के मिश्रित विषम धात्विक संकुलों का संश्लेषण, उनकी क्रियाशीलता एवं संरचनात्मक अभिलक्षण, अवरक्त वर्णक्रम , दृश्य वर्णक्रम और चुम्बकत्व गुणों का वर्णन किया गया है।

प्रयोगात्मक

सारी अभिक्रियाएँ शुष्क वायुमण्डल में की गई तथा विलायकों को प्रामाणिक विधियों से निर्जलित किया गया है। निर्जलीय $CoCl_2$, $CuCl_2$ एवं $Zr (OPr^i)_4\ Pr^iOH$ [25] को प्रयोगशाला में प्रामाणिक विधि द्वारा बनाया गया, साथ ही धातुओं का प्रतिशत निर्धारण मिश्रित आक्साइड के रूप में किया गया है। अणुभार का निर्धारण हिमांकमापी विधि द्वारा हिमकारी बेन्जीन में किया गया है। अवरक्त स्पेक्ट्रमिति (4000-200 से०मी०$^{-1}$) एवं दृश्य वर्णक्रम का मापन क्रमशः परकिन– एल्मर 557 तथा पाई यूनिकेम S8 - 100 द्वारा किया गया। इसके साथ ही, चुम्बकीय-प्रवृत्ति का मापन, ग्वॉय तुला पर $Hg [Co (NCS)_4]$ को प्रगमाणिक मानकर किया गया है। कोबाल्ट (II) एवं कॉपर (II) के क्लोराइड विषम धात्विक संकुलों, $ClCo\{Zr_2(OPr^i)_9\}$ व $ClCu\{Zr_2(OPr^i)_9\}$ को पूर्व दर्शायी विधि द्वारा निर्मित किया गया है।

(क) पोटैशियम ऐसीटाइल ऐसीटोन की अभिक्रिया $[ClCo\{Zr_2(OPr^i)_9\}]$ **के साथ 1:1 मोलर अनुपात में :**

ताजा निर्मित $K(CH_3COCH\,COCH_3)$ (0.21 ग्रा; 1.52 मिलीमो० {पोटैशियम धातु (0.056ग्रा०; 1.53मिली मो०) को $CH_3COCH_3CH_2COCH_3$ (10 मिली में घोल कर बनाया गया है} को $[ClCO\{Zr_2(OPr^i)_9\}]$ (1.21ग्रा०, 1.50 मिली०मो०) के बेन्जीन विलयन (3 मिली०) में मिलाया गया और अभिक्रिया-मिश्रण में लगभग 2 घण्टों तक पश्चवाहित किया गया है।

विलयन का रंग नीला से बैंगनी-लाल में परिवर्तित हो गया तथा पृथक हुए KCl को निस्यंदन द्वारा अलग किया गया है। निस्यंद को सुखाने के बाद बैगंनी-लाल ठोस (1.24 ग्रा०, 96%) प्राप्त हुआ जिसका संघटन $[(CH_3\,COCH\,COCH_3)\,Co\{Zr_2(OPr^i)_9\}$ ज्ञात किया गया।

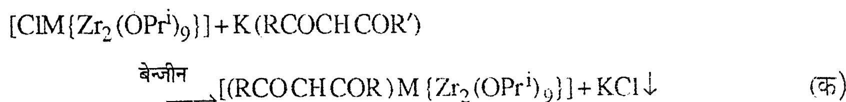
(ख) पोटैशियम ऐराइलाक्साइड की अभिक्रिया के साथ 1:1 मोलर अनुपात में :

बेन्जीन (लगभग 35 मिली०) में $[ClCO\{Zr_2(OPr^i)_9\}]$ (1.40 ग्रा०, 1.73 मिली० मोल) को घोलने से प्राप्त विलयन में, ताजा बनाया हुआ {KOAr (0.28 ग्रा०, 1.75 मिली० मोल) K (0.07 ग्रा०, 1.74 मिली० मोल) को 2, 6-$Me_2\,C_6H_3OH$ (0.21 ग्रा० 1.72 मिली० मोल) के साथ THF (लगभग 20 मिली०) में घोल कर बनाया गया} को मिला कर लगभग 2 घण्टे तक पश्चवाहित (reflux) किया गया। इस समय विलयन का रंग नीले से बैंगनी-लाल में परिवर्तित हो गया। अवक्षित KCl (0.13 ग्रा०, 1.74 मिली० मोल) को छान कर अलग किया गया तथा शेष विलायक को निम्न दाब पर निकाला गया। इस तरह बैगनी-लाल ठोस (1.5 ग्रा०,97%) प्राप्त हुआ जिसका संघटन $[(M\text{-}OAr)\,Co\{Zr_2(OPr^i)_9\}$था।

उपर्युक्त विधियों से ही अन्य कोबाल्ट (II) एवं कापर (II) क्लोराइड/आइसोप्रोपाक्साइड के ऐराइलाक्सी-व ऐसीटाइल ऐसीटोनेटो-व्युत्पन्नों का संश्लेषण किया जा सका है जिनका विवरण सारणी (I) में दिया गया है।

परिणाम तथा विवेचना

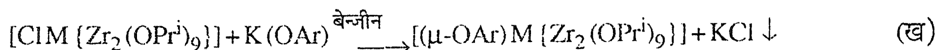
नये β-डाइकीटोनेटो-तथा फीनाक्सो-(ऐरिलोक्सो) कोबाल्ट (II)/कॉपर (II) के विषम-धात्विक मिश्रित संकुलों को निम्नलिखित, सामान्य विनिमय अभिक्रियाओं द्वारा संश्लेषित किया गया :



$$[ClM\{Zr_2(OPr^i)_9\}] + K(RCOCHCOR') \xrightarrow{\text{बेन्जीन}} [(RCOCHCOR)M\{Zr_2(OPr^i)_9\}] + KCl\downarrow \qquad (क)$$

जहाँ, M = Co (II) तथा Cu (II); $R = R' = CH_3$ (I तथा & Ia′);

$R = R' = CF_3$ (Ib तथा Ib′); $R = CH_3$, $R' = CF3$ (Ic तथा Ic′))



$$[ClM\{Zr_2(OPr^i)_9\}] + K(OAr) \xrightarrow{\text{बेन्जीन}} [(\mu\text{-}OAr)M\{Zr_2(OPr^i)_9\}] + KCl\downarrow \qquad \text{(ख)}$$

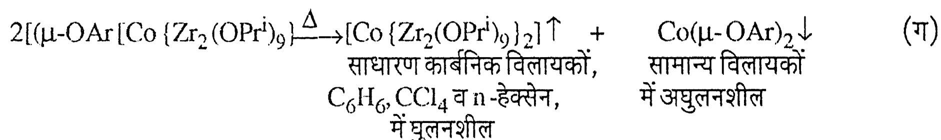
Ar = 2,6-$Me_2C_6H_3$ (IIa तथा II'a); Ar = 3, 5-$Me_2C_6H_3$;

(IIb तथा IIb'); Ar = p - ClC_6H_4 (IIc तथा IIc')

यहाँ पर कोबाल्ट (II) व्युत्पन्नों के लिये, Ia, Ib, Ic, IIa, IIb, तथा IIc' संकेत प्रयुक्त किये गये हैं तथा कॉपर (II) व्युत्पन्नों के लिये Ia', Ib', Ic', IIa', IIb' तथा IIc'.

उपर्युक्त विषमधात्विक संकुलों को निम्न दाब पर वाष्पीकरण / अथवा ऊर्ध्वपातन /या क्रिस्टलीकरण (बेन्जीन और n-हेक्सेन मिश्रण से) विधि द्वारा शुद्ध किया गया।

स्मरणीय रहे कि कोबाल्ट (II) के विषमधात्विक संकुलों, [(RCOCHCOR') Co $\{Zr_2(OPr^i)_9\}$] (Ia - Ic) का अपरिवर्तित रूप से निम्न दाब पर वाष्पीकरण हुआ है जब कि [(M - OAr)Co $\{Zr_2(OPr^i)_9\}$] (IIa - IIc) प्रायः निम्न दाब पर भी गर्म करने पर अपने अवयंवों में अपघटित होकर वाष्पशील, [Co $\{Zr_2(OPr^i)_9\}]^3$ (_18°C/ 0.1 मिमी० मरकरी पर) और अवाष्पशील, [Co (M - OAr)]$_n$ (बहुलक) देता है :



$$2[(\mu\text{-}OAr[Co\{Zr_2(OPr^i)_9\} \xrightarrow{\Delta} [Co\{Zr_2(OPr^i)_9\}_2]\uparrow + Co(\mu\text{-}OAr)_2\downarrow \qquad \text{(ग)}$$

साधारण कार्बनिक विलायकों, C_6H_6, CCl_4 व n-हेक्सेन, में घुलनशील — सामान्य विलायकों में अघुलनशील

उत्पाद (अ) को तत्व विश्लेषण के साथ-साथ स्पेक्ट्रमिति अध्ययनों के द्वारा भी अभिलक्षित किया गया और यह पाया गया कि यह प्रतिवेदित यौगिक जैसा ही है।

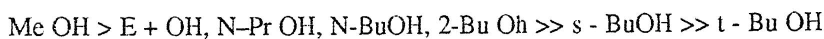
ऐराइलाक्सो और β-डाइकीटोनेटो-कोबाल्ट (II) विषम धात्विक संकुल, बैगंनी या लाल ठोस तथा आर्द्रता के प्रति क्रियाशील पाये गये हैं। ये सभी यौगिक कार्बनिक विलायकों (जैसे, बेन्जीन, कार्बन टेट्राक्लोराइड व नार्मल हेक्सेन) में अत्यधिक घुलनशील हैं। अणुभार का मापन करने पर ऐराइलाक्सो -व्युत्पन्न, द्विलक तथा β-डाईकिटोनेटो-व्युत्पन्न एकलक पाये गये।

कॉपर (II) के फ्लोरोऐसीटाइल ऐसीटोनेट व्युत्पन्नों [($RCOCHCOCF_3$) Co$\{Zr_2(OPr^i)_9\}$](Ia-Ic) को क्रिस्टलीकरण (बेन्जीन / n -हेक्सेन मिश्रण में) द्वारा शुद्ध किया गया तथ निम्न दाब पर वाष्पीकरण भी किया गया। जब ऐरालाक्साइड-व्युत्पन्नों [(μ-OAr [Co $\{Zr_2(OPr^i)_9\}$] (IIa' - IIc') को निम्न दाब पर गरम किया गया तो वे अपने अवयवों में अपघटित हो गये (अभिक्रिया ग) जैसा—जिन्हें तत्व विश्लेषण द्वारा अभिलक्षित किया गया।

ऐराइलाक्सो लिगैन्ड (एक दन्तुर) की उपस्थिति में व्युत्पन्न पश्चवाही बेन्जीन में द्विलक संरचना दर्शाता है जबकि द्विलक, लिगैन्ड, जैसे ऐसीटाइल ऐसीटोनेट, के साथ व्युत्पन्न, एकलक संरचना दर्शाता

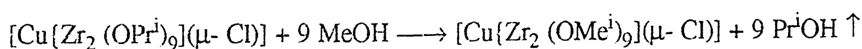
है। इस प्रकार व्युत्पन्न की आणविक जटिलता (Molecular complexity) पुनः चुम्बकीय एवं दृश्य-वर्णक्रम अध्ययनों द्वारा भी पाई गयी।

क्लोरो-विषमधात्विक संकुल [Co $\{Zr_2(OPr^i)_9]$ का ऐल्कोहॉल अन्तरापरिवर्तन रुचिकर परिणामों को दर्शाता है तथा निम्नलिखित क्रम में क्रियाशीलता प्रदर्शित करता है :



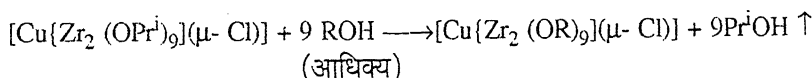
Me OH > E + OH, N–Pr OH, N-BuOH, 2-Bu Oh >> s - BuOH >> t - Bu OH

मेथाक्सी द्वारा आइसोप्रोपाक्सी समूहों का प्रतिस्थापन, कमरे के ताप पर (25° से ० पर) भी पूर्णरूप से हो जाता है।



$$[Cu\{Zr_2(OPr^i)_9](\mu\text{- Cl})] + 9\,MeOH \longrightarrow [Cu\{Zr_2(OMe^i)_9](\mu\text{- Cl})] + 9\,Pr^iOH \uparrow$$

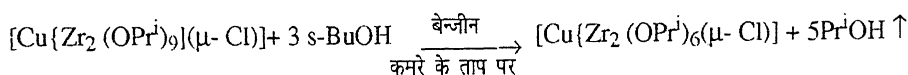
दूसरी ओर, EtOH, nR OH, n-BuOH और i-BuOH के साथ सभी 9-आइसोप्रोपाक्सी समूह का प्रतिस्थापन केवल पश्चवाही ताप पर ही सम्भव है:



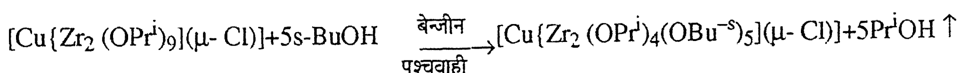
$$[Cu\{Zr_2(OPr^i)_9](\mu\text{- Cl})] + \underset{(\text{आधिक्य})}{9\,ROH} \longrightarrow [Cu\{Zr_2(OR)_9](\mu\text{- Cl})] + 9Pr^iOH \uparrow$$

(जहाँ R = Et, n - Pr, n-Bu या i-Bu)

जबकि s-BuOH के आधिक्य में, साथ ही अभिक्रिया भिन्न-भिन्न दशा में विभिन्न उत्पादों को देता है—

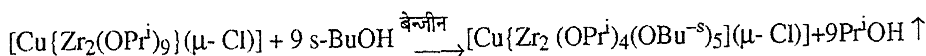


$$[Cu\{Zr_2(OPr^i)_9](\mu\text{- Cl})] + 3\,s\text{-BuOH} \xrightarrow[\text{कमरे के ताप पर}]{\text{बेन्जीन}} [Cu\{Zr_2(OPr^i)_6(\mu\text{- Cl})] + 5Pr^iOH \uparrow$$



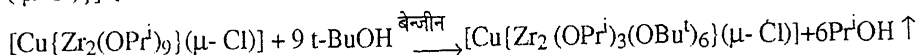
$$[Cu\{Zr_2(OPr^i)_9](\mu\text{- Cl})] + 5s\text{-BuOH} \xrightarrow[\text{पश्चवाही}]{\text{बेन्जीन}} [Cu\{Zr_2(OPr^i)_4(OBu^{-s})_5](\mu\text{- Cl})] + 5Pr^iOH \uparrow$$

s-BuOH के साथ आइसोप्रोपाक्सी समूह का पूर्ण प्रतिस्थापन केवल उस दशा में सम्भव है जब अभिक्रिया के फलस्वरूप बने आइसोप्रोपेनॉल को लगातार प्रभाजित किया गया।



$$[Cu\{Zr_2(OPr^i)_9\}(\mu\text{- Cl})] + 9\,s\text{-BuOH} \xrightarrow{\text{बेन्जीन}} [Cu\{Zr_2(OPr^i)_4(OBu^{-s})_5](\mu\text{- Cl})] + 9Pr^iOH \uparrow$$

जब अभिक्रिया t-BuOH के आधिक्य में (उत्पन्न Pr^iOH को एजियोट्रापिक प्रतिस्थापन) की गयी तो लगभग 14 घण्टे के उपरान्त एक व्युत्पन्न प्राप्त हुआ, जिसका संघटन, $[Cu\{Zr_2(OPr^i)_3(OBu^t)_6\}(\mu\text{-Cl})\}]$ है :



$$[Cu\{Zr_2(OPr^i)_9\}(\mu\text{- Cl})] + 9\,t\text{-BuOH} \xrightarrow{\text{बेन्जीन}} [Cu\{Zr_2(OPr^i)_3(OBu^t)_6\}(\mu\text{- Cl})] + 6Pr^iOH \uparrow$$

सारणी (1 a)

कोबाल्ट (II) एवं कापर (II) के विषम धात्विक संकुलों का संश्लेषण; तत्व विश्लेषण, चुम्बकत्व एवं दृश्य वर्णाक्रम का मान :

अधिकर्मक (मोलर अनुपात में)	उत्पाद; उत्पादकता (प्रतिशत में)	(प्रतिशत) तत्व विश्लेषण; प्राप्त (सैद्धान्तिक)		μ_{eff} (B.M.) (298 के ताप)	दृश्य वर्णक्रम (10^{-3} सें०मी०$^{-1}$) max. 4 Tig (F) $^4T_{1g}(F) \rightarrow T_{1g}(P)$
		Co/Cu	Zr		
I + K ($CH_3COCHCOCH_3$)	[($CH_3COCHCOCH_3$) (Co{$Zr_2(OPr^i)_9$}] (Ia) (96)	6.8 (6.8)	21.4 (20.9)	4.85	18.0, 19.9 (sh)
I + K ($CF_3COCHCOCF_3$)	($CF_3COCHCOCF_3$) Co{$Zr_2(OPr^i)_9$}] (Ib) (97)	6.2 (6.0)	19.1 (18.6)	4.90	18.1, 19.4 (sh)
I + K ($CH_3COCHCOCF_3$)	[($CH_3COCHCOCF_3$) Co{$Zr_2(OPr^i)_9$}] (Ic) (94)	6.5 (6.4)	20.2 (19.7)	4.85	18.1, 19.6 (sh)
I + K(OAr)	[(μ- OAr) CO {Zr_2 ($OPr^i)_9$}] (IIa) (97)	6.7 (6.6)	20.9 (20.4)	4.80	17.6, 19.8 (sh)
I + K(OAr)	[(μ - OAr) CO {Zr_2 ($OPr^i)_9$}] (IIb) (98)	6.7 (6.6)	20.8 (20.4)	4.80	18.0, 19.8 (sh)
I + K(OAr)	[(μ – OAr) CO {Zr_2 ($OPr^i)_9$}] (IIc) (94)	6.6 (6.5)	20.7 (20.3)	4.82	18.0, 19.8 (sh)
II + K ($CH_3COCHCOCH_3$)	[($CH_3COCHCOCH_3$) (Cu{$Zr_2(OPr^i)_9$}] (Ia′) (97)	7.2 (7.2)	20.9 (20.8)	1.71	(15.8) $^2E_g \xrightarrow{\nu_{max}} {^2T_{2g}}$
II + K ($CF_3COCHCOCF_3$)	($CF_3COCHCOCF_3$) Cu{$Zr_2(OPr^i)_9$}] (Ib′) (97)	6.4 (6.5)	19.2 (18.5)	1.72	(15.7) " "
II + K ($CH_3COCHCOCF_3$)	[($CH_3COCHCOCF_3$) Cu{$Zr_2(OPr^i)_9$}] (Ib′) (98)	6.7 (6.8)	19.8 (19.6)	1.70	(15.0) " "
II + K(OAr)	[(μ- OA_r) Cu {Zr_2 ($OPr^i)_9$}] (IIa′) (96)	7.0 (7.1)	20.8 (20.3)	1.62	(15.5) " "
II + K(OAr)	[(μ- OA_r) Cu {Zr_2 ($OPr^i)_9$}] (IIb′) (96)	7.0 (7.1)	20.9 (20.2)	1.60	(14.9) " "
II + K(OAr)	[(μ- OA_r) Cu {Zr_2 ($OPr^i)_9$}] (IIc′) (96)	7.0 (7.1)	20.9 (20.0)	1.61	(14.6) " "

*I = [Cl Co{$Zr_2(OPr^i)_9$}] और II = [Cl Cu{Zr_2 ($OPr^i)_9$]; Ar = 22, 6, -$Me_2C_6H_3$ (IIa & IIa′);
Ar = 3, 5 $Me_2C_6H_3$ (IIb और IIb′); Ar = p-Cl C_6 H_4 (IIc और IIc′)

सारणी (1b)

कॉपर (II) (क्लोराइड) विषम धात्विक संकुलन (II) का विभिन्न एल्कोहौल के साथ रासायनिक अभिक्रिया; तत्व विश्लेषण, दृश्य वर्ण क्रम तथा चुम्बकत्व (μ_{eff}) का मान

अभिकर्मक	व्युत्पन्न (प्रतिशत उत्पाद)	तत्व विश्लेषण प्रतिशत प्राप्त (सैद्धान्तिक) Cu	Zr	Cl	दृश्यवर्णक्रम ν_{max} 10^{-3}cm	μ_{eff}(B.M.)
II + Me OH (Excess)	[Cu{Zr_2 (OMe)$_9$}(μ–Cl)] (97)	11.3 (11.3)	33.0 (32.6)	6.3 (6.3)	—	1.60
II + Et OH (Excess)	[Cu{Zr_2 (OEt)$_9$}(μ–Cl)] (96)	9.2 (9.3)	26.8 (26.6)	5.2 (5.2)	15.0	15.0
II + Pr^nOH (Excess)	[Cu{Zr_2 (OPr^n)$_9$}(μ–Cl)] (99)	7.8 (7.8)	22.9 (22.4)	4.3 (4.4)	—	—
II + Bu^n OH (Excess)	[Cu{Zr_2 (OBu^n)$_9$}(μ–Cl)] (99)	6.7 (6.8)	20.0 (19.4)	3.7 (3.8)	14.5	1.55
II + Bu^iOH (Excess)	[Cu{Zr_2 (OBu^i)$_9$}(μ–Cl)] (92)	6.7 (6.8)	20.0 (19.4)	3.7 (3.8)	—	—
II + 3Bu^s OH	[Cu{Zr_2 (OPr^i)$_6$ (OBu^s)$_3$}(μ–Cl)] (97)	7.4 (7.4)	21.7 (21.4)	4.1 (4.2)	—	—
II + 5Bu^s OH	[Cu{Zr_2 (OPr^i)$_4$ (OBu^s)$_5$}(μ–Cl)] (98)	7.2 (7.2)	21.1 (20.7)	4.0 (4.0)	—	—
II + Bu^s OH (Excess)	[Cu{Zr_2 (OBu^s)$_9$}(μ–Cl)] (97)	6.7 (6.8)	19.8 (19.4)	3.7 (3.8)	14.8	1.61
II + 6Bu^t OH	[Cu{Zr_2 (OPr^i)$_3$ (OBu^t)$_6$}(μ–Cl)] (98)	7.0 (7.1)	20.9 (20.4)	3.9 (4.0)	14.9	1.60

सारणी 2

कोबाल्ट (II) एवं कॉपर (II) विषम धात्विक व्युत्पन्नों के अभिलाक्षणिक अवरक्त वर्णक्रम (I.R.) बैंड का मान (से० मी०)

Ia : 1610 s, ν(C=O); 1540 s ν(C=C); 1140 s, 1130 m ν(C-O)M ;560 mv (Zr—O) ; 440 m ν(Co—O)

Ib : 1615 s, ν(C=O); 1535 s ν(C=C); 1170 s, 1130 m ν(C—O)M ;590 mv(Zr—O) ; 450 mv (Co—O).

Ic : 1620 s, ν(C=O); 1545 s ν(C=C); 1170 s, 1130 m ν(C—O)M ;610 mv (Zr—O) ; 450 mv(Co—O).

IIa : 1270 s, ν(C=O)*; 1175 m, 1080 m ν(C—O)M ; 580 m ν(Zr – O) ; 440 m ν(Co – O).

IIb : 1260 s, 1210 ν(C—O)*; 1160 m, 1150, 960, ν(C – O)M; 595 m ν(Zr – O) ; 450 m ν(Co – O).

I^1_a : 1610 s, ν(C= O); 1540 s, ν(C = C); 1170 s , 1130 m, 960 m, ν(C- O)M; 570 mv (Zr – O) ; 450 m ν(Cu–O).

I^1_b : 16150 s, ν(C= O); 1540 s, ν(C = C); 1160 s, 1130 m, 960 m, ν(C – O)M; 590 m, ν(Zr – O); 460 mb ν(Cu–O).

I^1_c : 1610 s, ν(C = O); 1545 s, ν(C = C); 1170 s, 1000 m, 980 m, ν(C – O)M; 595 mbr, ν(Zr – O); 490 m, 450, ν(Cu – O).

II^1_a : 1270s ν(C—O)* 1180, 1180 m, 1030 m, ν(C – O)M; 585 m, ν (Nr – O); 400 m, ν(Cu – O).

II^1_b : 1290 w, 1250 w, ν(C – O); 1150 m, 1190 m, 1020 m, ν (C – O)M; 585 ν(Zr – O), 400 m ν(Cu – O).

II^1_c : 1260 m, 1210 m, ν(C – O); 1160 m, 1150 m, 1020 m, ν(C – O)M; 595 ν (Zr – O), 480 m ν(Cu – O).

एराइलाक्साइड समूह (जो धातुओम से जुडे है) की आवृत्तियाँ।

सभी कापर (II) विषमधात्विक संकुल, हरा या पीला- भूरा तथा नमी के प्रति क्रियाशील, ठोस व कार्बनिक विलायकों (जैसे C_6H_6, CCl_4 व n-हेक्सेन) में घुलनशील (केवल $[Cu\{Zr_2(OPr^i)_9\}(\mu\text{-}Cl)]$ जो अघुलनशील हैं) होते हैं।

चुम्बकीय अध्ययन

सभी संश्लेषित कोबाल्ट (II) व्युत्पन्नों (Ia - Ic तथा IIC - IIc) के लिये μ_{eff} का मान, कमरे के ताप पर 4.60 - 5.20 BM. के परास में पाया गया जो पहले के प्रतिवेदित परास, 4.80 - 5.20 BM. में हैं जो उच्च-चक्रण [26, 27] अणुफलकीय (high spin Octahedron) व्युत्पन्न को दर्शाता है। ऐराइलाक्सो कोबाल्ट (II) व्युत्पन्नों, (IIa - IIc) के लिये प्रेक्षित मान, 4.60 - 4.80 BM जो β- डाइकिटोनेटो-व्युत्पन्न (Ia-Ic) (4.85 - 5.20 BM) की तुलना में कम हैं (सारणी Ia & Ib) यह कमी, सम्भवतः $\mu - OAr$ द्वारा सेतु बनाकर द्विलकीकृत $Co(\mu - OAr)_2Co$ होने से होता है। कापर के नये वषम धात्विक यौगिक (Ia - Ic & IIa - IIc) चक्रण-माप [26, 27] (1.73BM) को ही दर्शाति हैं उन यौगिकों, में जहाँ β-डाईकिटोनेट समूह है। μ_{eff} का मान, 1.62 - 1.72 BM के परास मे पाया गया है जो चक्रणमान (एकलक) के लगभग हैं जबकि क्लोराइड व ऐराइलआक्साइड यौगिकों में इसका मान 1.50 - 1.62 BM के परास में हैं। इस प्रकार के मान में कमी दो कापर केन्द्रों $Cu<^{X}_{X}>Cu$ के मध्य, सम्भवतः, प्रबल प्रतिचुम्बकत्व अति-विनिमय (Antiferromagnitic Super Exchange) के कारण होता है। व्युत्पन्न, $[Cu\{Z_2(OPr^i)_9\}(\mu\text{-}Cl)]_n$ के लिये μ_{eff} का मान, 1.45 BM, (जो सम्भवतः उच्च बहुलक होने के कारण हैं) है।

इलेक्ट्रान चक्रण अनुनाद (e. s. r.)

कापर (II) के कुछ यौगिकों का इलेक्ट्रान चक्रण अनुनाद एवं ठोस स्पेक्ट्रा, (कमरे के ताप पर) प्राप्त किये गये। इस तरह के तीव्र अनुनाद रेखा, g = 2.340 प्राप्त हुई जो एकलक संरचना को दर्शाती है। निम्न ताप पर यह सुविधा उपलब्ध न होने के कारण विभिन्न 'g' मानों की गणना नहीं की जा सकी।

दृश्य वर्णक्रम का अध्ययन

नये संश्लेषित कोबाल्ट (II) व्युत्पन्नों के दृश्य वर्णक्रम का अध्ययन बेन्जीन विलयन में किया गया। सभी व्युत्पन्न के असममित बैन्ड,[28-30] 17.9×10^3 सेमी० $^{-1}$ क्षेत्र में प्राप्त किये गये हैं, जो $^4T_{1g}(F) \xrightarrow{\nu_1} {}^4T_{1g}(P)$ संक्रमण क दर्शाता है। इसके साथ ही उच्च आवृत्ति की तरफ, 19.6×10^3 सेमी० पर के शोल्डर (Shoulder) को दर्शाता है (जो द्विक अवस्थायें, मुक्त आयन, (2_G व 2_H) जो अष्ठफलकीय ज्यामिति को अभिलक्षित करता है। सामान्यतया कापर तीन प्रकार के ज्यामिति रूपों में पाया जाता है, (क) चतुष्फलकीय और वर्गाकार, (ख) त्रिकोणिय द्विपिरैमिडल, और (ग) अष्ठफलकीय। अष्ठफलकीय कापर (II) व्युत्पन्नों[29] का दृश्य वर्णक्रम केवल एक बैंड दर्शाता है जो $^2E_g \rightarrow {}^2T_{2g}$ (~ 16000 से०मी० $^{-1}$ पर) संक्रमण के कारण होता है। यहाँ पर सभी यौगिक एक चौडा बैंड 14500- 15,550 से०मी० $^{-1}$ के परास में (सारणी) (Ia & Ib) दर्शाता है। यह कापर (II) के चारों

तरफ D_{4h} विकृत अष्ठफलकीय संरचना दर्शाता है, जो $[Cd\{Zr_2(OPr^i)_9\}(\mu\text{- Cl})]^{24}$ के समरूप है, और $\{Zr_2(OPr^i)_9\}$ समूह एक चतुःदन्तुर की तरह से व्यवहर करता है।

अवरक्त (स्पेक्ट्रमिति) वर्णक्रम अध्ययन

कोबाल्ट (II) एवं कापर (II) विषम धात्विक व्युत्पन्नों का अवरक्त वर्णक्रम नुजाल मल में प्राप्त किया गया तथा सभी व्युत्पन्न अभिलक्षित आवृत्तियाँ,[31-33] क्रमशः ν(C—O) = 1180 - 940 से०मी०$^{-1}$ (मेटल एल्कॉम्सी); ν(Zr— O) = 630 - 570 से०मी०$^{-1}$; ν(Co/Cu—O = 490–400 से०मी०$^{-1}$; ν(Cu - Cl) = 350 -205 से०मी०$^{-1}$ पर दर्शाता है। β-डाइकिटोनेट व्युत्पन्न, ν(C = C) = 1540 से०मी०$^{-1}$; ν(C = O) = 1610 से०मी०$^{-1}$; अवशोषण बैन्डों को दर्शाता है। ऐराइलाक्सो ब्युत्पन्नों[34] के लिये, ν(C — O) = 1275-1285 से०मी०$^{-1}$; पर प्राप्त किया गया जो मु क्त फीनाँ(त्त(C–O) = 1240 - 1265) स्से०मी०$^{-1}$; से + 25 से०मी०$^{-1}$; उच्च आवृत्ति की तरफ है (सारणी-2।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रो० राम चरण मेहरोत्रा, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर का अत्यन्त आभारी है जिन्होंने बुहमूल्य सुझावों से सहयोग प्रदान किया है।

निर्देश

1. दुबे, आर. के., सिंह, ए. तथा मेहरोत्रा, आर. सी. : Ind. J. Chem. 1992 : 31A, 156
2. शाह, ए. : Ph.D. Thesis, Rajasthan University, Jaipur, 1987.
3. दुबे, आर. के., सिंह, ए. तथा मेहरोत्रा, आर. सी. : Inorg. Chim, Acta, 1986 : 1183, 151.
4. दुबे, आर. के., सिंह, ए. तथा मेहरोत्रा, आर. सी. : Inorg. Cim Acta, 1988 : 143, 169.
5. दुबे, आर. के., सिंह, ए. तथा मेहरोत्रा, आर. सी. : Transition Met. Chem. 1985 : 10, 473
6. दुबे, आर. के., सिंह, ए. तथा मेहरोत्रा, आर. सी. : Pohyhedron, 1987 : 6, 326.
7. दुबे, आर. के. : Ph. D. Thesis, Rajasthan University, Jaipur. 1986
8. दुबे, आर. के., सिंह, ए. तथा मेहरोत्रा, आर. सी., : Bull. Chem. Soc. Japan,1988 : 61, 982.
9. गर्ग, गीता, दुबे, आर. के., सिंह, ए. तथा मेहरोत्रा, आर. सी., : Polyhedron, 1991 : 10, 1733.
10. दुबे, आर. के., सिंह, ए. तथा मेहरोत्रा, आर. सी., : J. Organometal Chem. 1988 : 341, 569
11. दुबे, आर, के., शाह, ए. सिंह, ए. तथा मेहरोत्रा, आर. सी., : Recl. Trav. Chim. Pays - Bas 1988 : 107, 273.

12. मेहरोत्रा, आर. सी., : Chemistry & Technology of Silicon and Tin; D. Kumar, V. G. Weng, N.S., Gielon, M., edn.; Oxford Press; 1991: pp. 93-109.

13. हैम्पडेन-स्मिथ, एम. जे., वार्क, जी. ए. तथा ब्रिंकर, सी. जे., : Coord. Chem. Rev. 1992 : 112, 81.

14. चांडलर, जी. सी., क्रिस्टोफर, आर. तथा हैम्पडेन-स्मिथ, एम. जे०, : Chem. Rev. 1993, :93, 1205.

15. ब्रिंकर सी. जे. तथा शेरेर, जी. डब्लू.,: Sol - Gel Science, The Physics and Chemistry of Sol-Gel Processing, Academic Press; Boston, 1990.

16. ब्रिंकर, सी. जे. तथा शेरेर, जी. डब्लू., : Ultra Structure Processing of Ceramics, Glasses and Composites; John Wiley & Sons, New York, 1984, p. 43.

17. (क) ब्रैडले डी. सी., : Chem. Rev. 1989 : 89, 1317.

(ख) बैडले, डी. सी., : Phil Tans. R. Soc. Lond. A 1999 : 330.

18. मेहरोत्रा, आर. सी., : J. Non Cryst. Solids, 1990 : 121, 1; 1992, 145, 1.

19. सेन्चेज, सी. तथा लीवेज, जे., : New J. Chem. 1990 : 14, 513.

20. दुबे, आर. के., : Transition Met. Chem. 1993 : 18, 243.

21. दुबे, आर. के., प्रेषित,1997.

22. मेहरोत्रा, आर. सी. तथा सिंह, जे. बी., : Inorg. Chem; 1984 : 23, 1046.

23. मेहरोत्रा, ए. तथा मेहरोत्रा, आर. सी., : J. Chem. Soc. (A), 1972 : 1203.

24. सोगानी, एस., सिंह, ए., बोहरा, आर. मेहरोत्रा, आर. सी. तथा नाटेमेंयर, एम., J. Chem. Soc. Chem. Commun. 1991, 738.

25. ब्रैडले, डी. सी., मेहरोत्रा, आर. सी. तथा वार्डला, डब्लू, J. Chem. Soc. 1952 : 2027.

26. फिगिस, बी. एन., तथा लेविस, जे., : Progr. Inorg. Chem., 1964 : 6, 37.

27. अर्नशाँ, ए.; : Introduction to Magneto Chemistry, Academic Press, New York, 1986.

28. लीवर, ए. बी. पी., : Inorganic Electronic Spectroscopy, Elsevier, Amsterdam, 2nd Ed. 1984.

29. फिगिस, बी. एन., : Introduction to Ligand Tidds, Wiley,Eastern Limited, Delhi, 1986.

30. एडमस, आर. डब्लू., विशाप, इ., मार्टिन, आर. एल. विन्टर, जी., : Aust. J. Chem. 1986 : 19, 206.

31. ब्रैडले, जी. सी., मेहरोत्रा, आर. सी. तथा गौड, जी. पी. , : Metal Alkoxides, Academic Press, London, 1978.

32. बैराक्लाफ, सी. जी., ब्रैडले, जी. सी., लेविस, जे. तथा थामस, आई. एम., : J. Chem. Soc. 1961, 2601; लिन्च, सी. टी., मैज्डीयास्नी, के. एस., स्मिथ, के. एस. तथा क्राफोर्ड, डब्लू.जे., : Anal Chem. 1964 : 36, 2332.

33. नाकामोटो, के., Infrared spedra of Inorganic and Coordination compounds. Wiley London 1970.

34. वेलामी, एल. जे., The Infrared Spectra of Complex Molecules, Chapman & Hall, London, 1975.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 1, January, 1999.

$\bar{I}$-फलन एवं गगनबार बहुपद के कुछ परिणाम

विश्व मोहन व्यास तथा अर्जुन के० राठी

गणित विभाग, डूंगर महाविद्यालय, बीकानेर (राज०)

[प्राप्त-सितम्बर 28, 1998]

सारांश

इस प्रपत्र का उद्देश्य गगनबार बहुपद पर आधारित प्रोफेसर आस्के[1] के बहुविख्यात परिणाम के प्रयोग द्वारा $\bar{I}$ - फलन के लिए एक विस्तार प्रमेय स्थापित करना है। इस प्रयोग को पुनः एक नये तथा रोचक समाकल को स्थापित करने के लिए प्रयोग में लागया गया है जो कि गगनबार बहुपद की लाम्बिकता के गुणधर्म पर आधारित है। प्राचलों के विशिष्टीकरण से हमें कई ज्ञात तथा अज्ञात परिणाम विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होते हैं।

Abstract

Some results involving $\bar{I}$-function and Gegenbauer polynomials. *By* Vishwa Monan Vyas and Arjun K. Rathie, Department of Mathematics, Dungar College, Bikaner (Raj).

The object of this paper is to establish an expansion theorem for $\bar{I}$-function by utilizing a well known result of Professor Askey's series on Gegenbauer polynomials. This theorem has been further employed to evaluate an integral with the help of the orthogonality property of the Gegenbauer polynomials. These results generalize a number of particular cases on appropriately specialising the parameters some of which are known and others are believed to be new.

1. प्रस्तावना

बहुचर्चित फॉक्स[4] एवं ब्राक्समा[2] के H-फलन का सार्वोकरण हाल ही में राठी[7] ने $\bar{I}$-फलन द्वारा किया जिसे निम्न रूप में परिभाषित एवं अंकित किया जाएगा।

$$I^{m,n}_{p,q}\left[z \left| \begin{matrix} (\alpha_1, A_1 : a_1), \ldots, (\alpha_p, A_p : a_p) \\ (\beta_1, B_1 : b_1), \ldots, (\beta_q, B_q : b_q) \end{matrix} \right.\right]$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_L \theta(s) z^s \, ds \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\theta(s) = \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma^{b_j}(\beta_j - B_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma^{a_j}(1 - \alpha_j + A_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma^{b_j}(1 - \beta_j + B_j s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma^{a_j}(\alpha_j - A_j s)} \cdot z^s \, ds \tag{1.2}$$

जहाँ α_j, $(j = 1, 2, \ldots, p)$ तथा β_j, $(j = 1, 2, \ldots, q)$ संमिश्र संख्याए हैं तथा $A_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ एवं $\beta_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$ व $a_j (j = 1, 2, \ldots, p)$ एवं b_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ अपरिमेय मान ग्रहण करते हैं तथा मेलिन-बार्निज प्रकार का एक उपयुक्त कंटूर L है और प्राचल इस प्रकार संकुचित रहते हैं कि I-फलन सार्थक रहता है। संक्षेप में (1.1) को दर्शाया जाएगा।

$$I^{m,n}_{p,q}\left[z \left| \begin{matrix} (\alpha_j, A_j, a_j)_p \\ (\beta_j, B_j, b_j)_q \end{matrix} \right.\right]$$

पुनः यदि

$$\bar{I}(z) = \bar{I}^{m,n}_{p,q}\left[z \left| \begin{matrix} (\alpha_1, A_1 : a_1), \ldots, (\alpha_n, A_n : a_n), \\ (\beta_1, B_1 : b_1), \ldots, (\beta_m, B_m : 1), \end{matrix} \right.\right.$$

$$\times \left.\left. \begin{matrix} (\alpha_{n+1}, A_{n+1} : a_{n+1}), \ldots, (\alpha_p, A_p : a_p) \\ (\beta_{m+1}, B_{m+1} : b_{m+1}), \ldots, (\beta_q, B_q : b_q) \end{matrix} \right]\right.$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_L \theta(s) \cdot z^s \, ds \tag{1.3}$$

जहाँ $\theta(s)$ दिया गया है

$$\theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma\left(\beta_j - B_j s\right) \prod_{j=1}^{n} \Gamma^{a_j}\left(1 - \alpha_j + A_j s\right)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma^{b_j}\left(1 - \beta_j + B_j s\right) \prod_{j=n+1}^{p} \left(\alpha_j - A_j s\right)} \tag{1.4}$$

इसी प्रपत्र में राठी[7] ने यह भी दर्शाया है कि

$$\overline{I}(z) \sim z^c$$

जहाँ

$$c = \min_{1 \le j \le m} \left[\operatorname{Re}\left(\beta_j / B_j \right) \right] \tag{1.5}$$

z के अल्प मान के लिए।

राठी के प्रपत्र से यह भी देखा जा सकता है कि समाकलन (1.3) अभिसारी होगा यदि $|\arg z| < \theta\pi/2,\ \theta > 0$

जहाँ

$$\theta = \sum_{j=1}^{m} B_j - \sum_{j=m+1}^{q} B_j b_j + \sum_{j=1}^{n} A_j a_j - \sum_{j=n+1}^{p} A_j a_j \tag{1.6}$$

2. आवश्यक परिणाम

1. गगनबार बहपद–गगनबार बहपद $c_n^{\nu}(x)$ को जो कि लेजेन्ड्र बहुपद का सार्वीकरण है, निम्नवत् परिभाषित किया जाता है।

$$\left(1 - 2xt + t^2\right)^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{\nu}(x)\, t^n \tag{2.1}$$

2. लाम्बिकता गुणधर्म

$$\int_{1}^{1} \left(1 - x^2\right)^{\nu \quad 1/2} c_n^{\nu}(x)\, C_m^{\nu}(x) dx = h_n\, \delta_{mn} \tag{2.2}$$

जहाँ

$$h_n = \frac{2^{1-2\upsilon}\, \pi\, \Gamma(n+2\upsilon)}{(n+\upsilon)\, n!\, [\Gamma(\upsilon)]^2}$$

तथा

δ_{mn} क्रोनेकर डेल्टा फलन है, अर्थात्

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, \text{यदि } m \neq n \\ 1, \text{यदि } m = n \end{cases}$$

३. आस्के[1] की बहुविख्यात श्रेणी

$$(\sin\phi)^{2\beta}\, c_l^{\beta}(\cos\phi) = \sum_{u=0}^{\infty} A_{u,l}^{\beta,\alpha}\, c_{l+2u}^{\alpha}\, (\sin\phi)^{2\alpha}\, (\cos\phi) \tag{2.3}$$

जहाँ

$$\alpha - 1/2 < \beta < \alpha,\; A_{u,l}^{\beta,\alpha} > 0.$$

तथा

$$A_{u,l}^{\beta,\alpha} = \frac{2^{2\alpha-2\beta}(l+2u+\alpha)\,(l+2u)!\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(l+2\beta)\,\Gamma(l+u+\alpha)\,\Gamma(u+\alpha-\beta)}{l!\,u!\,\Gamma(\alpha-\beta)\,\Gamma(l+u+\beta+1)\,\Gamma(l+2u+2\alpha)\,\Gamma(\beta)} \tag{2.4}$$

जब $\alpha = 1$ तो (2.3) सीजीगो[10] द्वारा प्राप्त निम्न श्रेणी में परिवर्तित हो जाता है।

$$(\sin\phi)^{2\beta-1}\, c_l^{\beta}(\cos\phi) = \sum_{u=0}^{\infty} A_{u,l}^{\beta}\, \sin(l+2u+1)\phi \tag{2.5}$$

जहाँ

$\beta > 0,\ \beta \neq 1, 2, \ldots$

तथा

$$A_{u,l}^{\beta} = \frac{2^{2-2\beta}(l+u)!\,\Gamma(l+2\beta)\,\Gamma(u-\beta+1)}{l!\,u!\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(l+u+\beta+1)\,\Gamma(\beta)} \tag{2.6}$$

पुनः यदि(2.5) में $l = 0$ तथा $\beta = 1 - s$ लें तो हमें गेक्राबर्ट[6] द्वारा प्राप्त श्रेणी मिलती है।

4. गगनबार बहुपद के लिए प्रसार सूत्र

$$c_n^{\upsilon}(\cos\phi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\,(\upsilon)_k\,(\upsilon)_n}{k!\,n!\,(1-\upsilon-n)_k} \cos(n-2k)\,\phi \qquad (2.7)$$

3. **प्रमुख परिणाम**

इस खण्ड में $\bar{I}$-फलन के लिए निम्न प्रमेय सिद्ध किया जाएगा।

$$\sum_{u=0}^{\infty} \bar{I}^{\,m+1,\,n+1}_{\,p+3,\,q+2}\left[4z \left| \begin{matrix} (2-\alpha-u,\,1;\,1)_{,1}\left(\alpha_j,\,A_j;\,a_j\right)_p, \\ (l+2;\,2;\,1)_{,1}\left(\beta_j,\,B_j;\,1\right)_{m,\,m+1}, \end{matrix}\right.\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix} (1,\,1;\,1),\,(l+2+u,\,1;\,1) \\ \left(\beta_j,\,B_j;\,b_j\right)_q,\,(2-\alpha,\,1,\,1) \end{matrix}\right]$$

$$\times \frac{2^{2u-2}(l+2u+\alpha)\,(l+2u)!\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(l+u+\alpha)}{l!\,u!\,\Gamma(1+2u+2\alpha)}$$

$$\times\, c^{\alpha}_{l+2u}\,(\sin\phi)^{2\alpha}\,(\cos\phi)$$

$$= \sin^2\phi \sum_{k=0}^{l} \frac{(-l)_k}{l!\,k!}$$

$$\times\, \bar{I}^{\,m+2,\,n+1}_{\,p+3,\,q+3}\left[\frac{z}{\sin^2\phi}\left| \begin{matrix} (l+1,\,1;\,1)_{,1}\left(\alpha_j,\,A_j;\,a_j\right)_p, \\ (k+1,\,1;\,1),\,(l+1,\,1;\,1)_{,1}\left(\beta_j,\,B_j;\,1\right)_{m,\,m+1}, \end{matrix}\right.\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix} (1,\,1;\,1),\,(1,\,1;\,1) \\ \left(\beta_j,\,B_j;\,b_j\right)_q,\,(l-k+1,\,1;\,1) \end{matrix}\right] \times \cos(l+2k)\,\phi \qquad (3.1)$$

जहाँ $0 < \phi < \pi$, $\theta > 0$, $|\arg z| < \theta\pi/2$ θ वैसा ही है जो (1.6) में दिया गया है।

उपपत्ति–(3.1) को सिद्ध करने के लिए (3.1) के वामपक्ष को I से सूचित करते हैं और फिर (3.1) की सहायता से $\bar{I}$- फलन को कंटूर समाकल में परिवर्तित करते हैं

$$I = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\theta(s)\,\Gamma(\alpha - 1 + u + s)\,\Gamma(l + 2 - 2s)}{\Gamma(l + 2 + u - s)\;\Gamma(\alpha - 1 + s)\;\Gamma(1 - s)} \cdot 2^{2s} z^s$$

$$\times \left[\frac{2^{2\alpha - 2}(l + 2u + \alpha)\;(l + 2u)\,!\;\Gamma(\alpha)\;\Gamma(l + u + \alpha)}{l\,!\;u\,!\;\Gamma(1 + 2u + 2\alpha)} \right.$$

$$\left. \times\; c^{\alpha}_{l+2u}\;(\sin\phi)^{2u}(\cos\phi) \right] ds \tag{3.2}$$

अब समाकल तथा योग का क्रम-परिवर्तन करते हैं जो कि दी गई शर्तों के अन्तर्गत वैध हैं। फिर यदि (2.3) का उपयोग करें जब कि $\beta = 1 - s$ तो

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_L (\sin\;\phi)^{2-2s}\; c_l^{1-s}\;(\cos\;\phi)\;\theta(s)\;.\;z^s\,ds \tag{3.3}$$

पुनः यदि हम परिणाम (2.7) का प्रयोग करें जहाँ $\upsilon = 1 - s$ तथा $n = l$ तो

$$I = \sin^2\phi\;\frac{1}{2\pi i}\;\infty \left[\frac{z}{\sin^2\;\phi} \right]^s$$

$$\times \left[\sum_{k=0}^{l} \frac{(-l)_k\;(1 - s)_k\;(1 - s)_l}{l\,!\;k\,!\;(s - l)_k} \cos(l - 2k)\,\phi \right] \theta(s)\;.\;ds \tag{3.4}$$

पुनः समाकल का योग का क्रम परिवर्तित करने पर; थोड़े से सरलीकरण के पश्चात्, प्राप्त फल में (1.3) का उपयोग करने से हमें वांछित फल (3.1) प्राप्त होता है।

4. प्रमुख समाकल

इस खण्ड में (3.1) की सहायता से निम्न समाकल का मान ज्ञात किया गया है।

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{(-l)_k}{l\,!\;k\,!} \int_0^{\pi} \sin^2\phi\;c^{\alpha}_{l+2r}\;(\cos\phi)\;\cos(l - 2k)\,\phi$$

$$\times\;\bar{I}^{\,m+2,\,n+1}_{\,p+3,\,q+3} \left[\frac{z}{\sin^2\;\phi} \left| \begin{matrix} (l + 1,\;1;\;1)_{,1}\left(\alpha_j,\,A_j;\,a_j\right)_p, \\ (k + 1,\,1:1),\,(l + 1,\,1\,;\,1)_{,1}\left(\beta_j,\,B_j:1\right)_{m,\,m+1}, \end{matrix} \right. \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} (1, 1; 1), (1, 1; 1) \\ \left(\beta_j, B_j; b_j\right)_q, (l-k+1, 1; 1) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma(l+\alpha+r)}{l!\ r!\ \Gamma(\alpha)} \overline{I}^{\,m+1, n+1}_{p+3, q+2}$$

$$\times \left[4z \left| \begin{matrix} (2-\alpha-r, 1; 1)_{,1} \left(\alpha_j, A_j; a_j\right)_p, \\ (l+2; 2; 1)_{,1} \left(\beta_j, B_j; 1\right)_{m, m+1}, \end{matrix} \right. \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} (1, 1; 1), (l+r+2, 1; 1) \\ \left(\beta_j, B_j; b_j\right)_q, (2-\alpha, 1, 1) \end{matrix} \right]$$

जहाँ $0 < \phi < \pi$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ $\theta > 0$, $|\arg z| < \theta\pi/2$ जहाँ θ वही है जो (1.6) में दिया गया है।

उपपत्ति

समाकल (4.1) को सिद्ध करने के लिए परिणाम (3.1) के दोनों पक्षों को $C^{\alpha}_{l+2r}(\cos\Phi)$ से गुणा करके Φ के सापेक्ष O से के π मध्य समाकलित करते हैं, फिर समाकल एवं व योग का क्रम-परिवर्तन (जो कि दी गई शर्तों के अन्तर्गत वैध है) करने पर

$$\sum_{u=0}^{\infty} \times \overline{I}^{\,m+1, n+1}_{p+3, q+2} \left[4z \left| \begin{matrix} (2-\alpha-u, 1; 1)_{,1} \left(\alpha_j, A_j; a_j\right)_p, \\ (l+2; 2; 1)_{,1} \left(\beta_j, B_j; 1\right)_{m, m+1}, \end{matrix} \right. \right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} (1, 1; 1), (l+2+u, 1; 1) \\ \left(\beta_j, B_j; b_j\right)_q, (2-\alpha, 1, 1) \end{matrix} \right]$$

$$\times \left[\frac{2^{2\alpha-2}(l+2u+\alpha)\,(l+2u)!\ \Gamma(\alpha)\ \Gamma(l+u+\alpha)}{l!\ u!\ \Gamma(1+2u+2\alpha)} \right.$$

$$\times \int_0^{\pi} C^{\alpha}_{l+2u} (\sin\varphi)^{2\alpha} (\cos\phi)\ C^{\alpha}_{l+2r} (\cos\varphi)\ d\varphi$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \frac{(-l)_k}{l!\, k!} \int_0^{\pi} \sin^2 \phi \cos (l - 2k) \phi \; C^{\alpha}_{l+2r} (\cos \phi)$$

$$\times \bar{I}^{m+2, n+1}_{p+3, q+3} \left[\frac{z}{\sin^2 \phi} \left| \begin{matrix} (l+1, 1; 1)_{,1} \left(\alpha_j, A_j ; a_j\right)_p , \\ (k+1, 1:1), (l+1, 1; 1)_{,1} \left(\beta_j, B_j ; 1\right)_{m, m+1} , \end{matrix} \right. \right.$$

$$\left. \times \begin{matrix} (1, 1; 1), (1, 1; 1) \\ \left(\beta_j, B_j : b_j\right)_q , (1 - k + 1, 1; 1) \end{matrix} \right]$$

अब यदि (4.2) के वाम पक्ष को (2.2) की सहायता से जहाँ $m = n$, $u = \alpha$, $x = \cos \phi$ तो थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् हमें वांछित समाकल (4.1) की प्राप्ति होती है।

5. विशिष्ट दशाएँ

चूंकि $\bar{I}$-फलन एक चर का बहुत ही व्यापक फलन है जिसमें ईनायत हुसैन[5] का H-फलन, फॉक्स[4] एवं माईजर का G-फलन निहित हैं। अतः प्राचलों के विशिष्टीकरण से हमें देवड़ा तथा राठी [3], मणि लाल शाह[9], रूपनारायण[8] एवं अन्य के ज्ञात परिणाम प्राप्त होते हैं परन्तु स्थानाभाव से हम उन्हें यहाँ नहीं दे रहे हैं।

निर्देश

1. आस्के, आर. : प्रोसी. अमे. मैथ. सोसा. 1965, 16, 1191-94.

2. ब्राक्सना, वी. एल. जे. : कम्पोजितो मैथ०, 1963. 15, 239-34.

3. देवड़ा, एच. एम. तथा राठी, ए. के : विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका, 1993, 36 (3), 209-214.

4. फॉक्स, सी. : ट्रान्जै. अमे. मैथ. सोसा., 1961, 98, 359–429.

5. इनायत हुसैन, ए. ए. : जर्नल फीजिक्स ए, मैथ. ज., 1987, 20, 4119-4128.

6. मेक्राबर्ट, जी. एम. : मैथ. जेड., 1961, 75, 79-82.

7. राठी, ए. के. : ली. मैथ. (केटनिया), 1997, 52, 297-310.

8. रूपनारायण : कम्पोजितो मैथ., 1966, 17, 149-151.

9. शाह, मणिलाल : इस्तानबुल टेक. यूनिवर्सिटीसी बुलटेनी, 1972, 25. 112–120.

10. सीजीगो, जी. : अमे. मैथ. सोसा., कोलोक पब्ली., 1959, 23.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 100 or £ 12 or $ 40
Per Vol. Rs. 25 or 3£ or $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211 002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
७ बेली एवन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854 640405

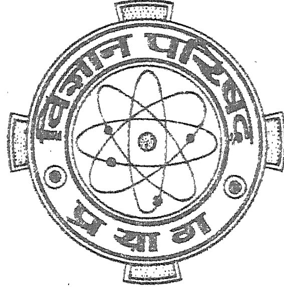
ISSN : 0505 - 5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 42 April 1999 No. 2



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

विषय-सूची

Vol. 42 April 1999 No. 2

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 2, April, 1999.

नाइट्रोजन तथा सूक्ष्म पोषक तत्वों के मिश्रण का राई (*Brassiea junea Coss*) की फसल वृद्धि, विकास, उत्पादन एवं बीज की गुणवत्ता पर प्रभाव

ए. के. गुप्ता तथा मृत्युंजय कुमार सिंह

कृषि रसायन विभाग, इलाहाबाद एग्रीकल्चरल इंस्टीट्यूट, इलाहाबाद-211007

[प्राप्त-15 नवम्बर 1998]

सारांश

प्रस्तुत शोध का प्रायोगिक अध्ययन इलाहाबाद एग्रीकल्चरल इंस्टीट्यूट के कृषि रसायन विभाग के शोध-क्षेत्र की क्यारियों में किया गया जिसमें नाइट्रोजन की तीन मात्रायें 0, 40, 60 किग्रा०/हे० तथा सूक्ष्म पोषक तत्वों (ताँबा, गंधक, बोरॉन, मैगनीज, जस्ता और लोहा) के मिश्रण (देवी माइक्रोशक्ति) की पांच मात्रायें 0, 2, 5 कि० दाना व 1लीटर संकुल घोल/100ली०/हे० का एक व दो छिड़काव राई की वरुणा प्रजाति (टा-59) पर 3-पुनः-प्रयोग के साथ फैक्टोरियल डिजाइन में किया गया। प्रयोग के परिणाम से स्पष्ट हुआ कि नाइट्रोजन की 60 कि० ग्रा०/हे० मात्रा तथा सूक्ष्म पोषक तत्वों के घोल के दो पर्णीया, छिड़काव से पौधों की ऊँचाई विकास, उपज में सार्थक वृद्धि हुई है। साथ ही दोनोंकी गुणवत्ता में भी वृद्धि हुई है।

नाइट्रोजन की अधिकतम मात्रा तथा 5 कि० ग्रा० सूक्ष्म पोषक मिश्रण/हे० का प्रभाव लाभकर दिखाई दिया जिससे पौधों का ताजा भार, शुष्क भार, पौधों में फलियों की संख्या, कलियों में दानों की संख्या, प्राथमिक व द्वितीयक शाखाओं पर अनुकूल प्रभाव हुआ। नाइट्रोजन की 60 कि० ग्रा०/हे० मात्रा तथा सूक्ष्म पोषक मिश्रण के संकुल घोल के 2 छिड़काव से दानों की प्रति हेक्टर उपज में 34.8%, राई के दानों के तेल में 15.2% तथा खली में प्रोटीन की मात्रा में 10.2% वृद्धि पायी गयी।

Abstract

Effect of nitrogen and micronutient mixture on growth, yield and quality of *Brassica Junca*. *By* A. K. Gupta and M. K. Singh, Allahabad Agriculture Institute, Allahabad.

A research experiment was conducted in the research field of Agri. chem. Department of Allahabad Agricultural Institute, Allahabad. Three doses of nitrogen 0, 40, 60 kg/ha as urea and five concentrations of chelated micronutrient mixture, "Devi Microshakti" (Cu, S, B , Mn, Zn and Fe), 0, 2, 5 kg granule/ha and chelated solution/100 lit/ha (one and two foliar sprays) were added to varuna variety (T-59) of *Brassica junca coss* with three replications in a factorial design.

The results revealed that 60 kg nitrogen and two foliar sprays of micronutrients mixture gave significant effect on height of plants, branching, grain yield and nutritive value of grains. High dose of N and 5 kg granule/ha treatment showed significant increase in fresh weight of plants, dry weight of plant, number of pods/plant, number of seeds/plant, primary and secondary brancling. 60 kg nitrogen alongwith two foliar sprays of micronutrient increased the yield by 34.8%, oil percentage in seeds to 15.2% and protein percentage in cake to 10.2% as compared to lower value.

राई तथा सरसों का उत्पादन भारत में सर्वाधिक होता है। इसकी खेती प्रतिवर्ष लगभग 41.94 लाख हेक्टेयर भूमि पर की जाती है तथा 24.72 लाख टन उपज प्राप्त होती है। राई तथा सरसों (ब्रासिका वंश) का गुण तथा उनका उपयोग लगभग समान होता है। इसमें 30-48% खाद्य तेल तथा 20-30 प्रतिशत प्रोटीन होता है। इसके साथ ही यह पशु आहार में बीज, खली, हरा चारा के रूप में उपयोगी है। भारतवर्ष में मसालेदार सब्जियों, आचार, आदि में इसके तेल का उपयोग सर्वाधिक होता है। अनेक शोध परिणामों से स्पष्ट है कि नाइट्रोजन के प्रयोग से पौधों के वानस्पतिक विकास, फलियों की संख्या तथा बीज की मात्रा में वृद्धि होती है। माइनी तथा अन्य[1] के अनुसार नाइट्रोजन की 33 कि० ग्रा/हे० मात्रा से फसल के शुष्क पदार्थ व दाने की उपज पर अनुकूल प्रभाव पड़ता है। सिंह तथा अन्य[2] ने भी सरसों में नाइट्रोजन देने पर पौधों की ऊँचाई, तने की लम्बाई, शाखाओं की संख्या, तने का शुष्क भार, फलियों की लम्बाई, फलियों में दानों की संख्या में अभूतपूर्व वृद्धि पायी। फ्रीमेन तथा अन्य[3], दुबे तथा अन्य[4] ने सल्फर का, हेमन्त राजन[5], इन्दो तथा अन्य[6], चन्देल इत्यादि[7] ने लोहा व अन्य सूक्ष्म मात्रिक तत्वों का अनुकूल प्रभाव पौध वृद्धि, बीज उपज तथा तेल की उपज पर देखा।

इस शोध प्रयोग द्वारा नाइट्रोजन एवं सूक्ष्म पोषक तत्वों के मिश्रण के संयुक्त प्रभाव से राई के

सारणी 1

उपचार	पौधों की औसत ऊंचाई (से. मी.)	प्राथमिक शाखा (औसत)	द्वितीय शाखाओं की औसत संख्या	पौधों में औसत फलियों की संख्या	प्रत्येक फली में दानों की औसत संख्या	पौधे का औसत ताजा भार (ग्रा०) (पुष्पावस्था)	पौध का औसत ताजा भार (ग्रा.) (कटाई के पूर्व)	पौध का औसत शुष्क भार (ग्रा०) (फली अवस्था)
N_1S_0	120.68	7.56	10.93	53.87	13.05	14.53	27.50	6.47
N_1S_1	121.23	8.36	11.33	54.47	14.78	15.25	29.23	6.93
N_1S_2	123.58	8.66	11.27	55.03	15.69	15.43	31.07	7.53
N_1S_3	120.98	8.46	11.30	54.5	15.08	16.13	30.27	7.03
N_1S_4	124.65	8.63	11.80	55.6	16.06	16.49	30.37	7.50
N_2S_0	124.65	8.50	13.0	54.03	17.31	15.42	31.30	7.33
N_2S_1	130.57	9.50	13.93	66.06	17.99	16.55	32.17	7.01
N_2S_2	132.05	9.50	14.30	53.17	18.01	17.43	32.67	7.73
N_2S_3	132.22	9.63	13.83	66.37	18.13	17.63	33.33	8.10
N_2S_4	132.82	9.73	14.4	67.6	18.8	17.07	34.50	8.47
एफ० परीक्षण	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक
क्रान्तिक अन्त (i) नाइट्रोजन	0.70	0.33	0.11	3.19	0.34	0.86	0.51	
(ii) सूक्ष्म पोषक	1.11	0.53	0.17	0.55	0.55	1.37	0.80	

उपचार :- (नाइट्रोजन)N_1=40 कि० ग्रा०/है०, (नाइट्रोजन)N_2=40 कि० ग्रा०/है०

S_1=(सूक्ष्म पोषक मिश्रण) 2 कि० ग्रा० दाना/है०, S_2=(सूक्ष्म पोषक मिश्रण) 5 कि० ग्रा० दाना/है०

S_3=(सूक्ष्म पोषक मिश्रण के घोल) /ली0/100 ली०/है० का एक छिड़काव

S_4=(सूक्ष्म पोषक मिश्रण के घोल) /ली०/100 ली०/है० के 2छिड़काव

वानस्पतिक विकास, बीज उपज व उनकी अनुकूलतम मात्रा निर्धारित करने का प्रयास किया गया है।

प्रयोगात्मक

भूमि तैयारी के उपरान्त 2×1 मीटर की क्यारियाँ बनाकर उसमें आवश्यक फास्फोरस एवं पोटाश की पूरी निर्धारित मात्रा तथा आधी मात्रा नाइट्रोजन की मात्रा दी गई। नाइट्रोजन की तीन मात्रायें 0, 40, व 60 कि ग्रा०/हे० यूरिया के रूप में, सूक्ष्मपोषक तत्वों का मिश्रण दाना "देवी माइक्रोशक्ति" की तीन मात्रायें 0, 2, 5 कि ग्रा०/हे० तथा पोषकों के संकुल घोल के 1ली०/100 लीटर/हे० का एक एक तथा दो पर्णीय छिड़काव (बुवाई के 35 दिन व 60 दिन पश्चात्) किया गया। प्रत्येक उपचार को 3 बार किया गया तथा सांख्यिकीय-फैक्टोरियल डिजाइन में प्रयोग लगाया गया। देवी माइक्रोशक्ति दाने तथा संकुल घोल में सल्फर, लोहा, मैगंनीज, बोरॉन, जस्ता, ताँबा की संतुलित मात्रा मौजूद है। राई की वरुणा प्रजाति (टा-59) प्रयोग की गई।

पौधों की ऊंचाई 90 वें दिन मापी गई, पौधों की प्राथमिक और द्वितीयक शाखाओं की संख्या, प्रत्येक पौधों में फलियों की औसत संख्या, प्रत्येक फली में दानों की औसत संख्या, दानों का औसत भार, पौधों का ताजा भार, शुष्क भार, बीज की उपज प्रति हेक्टर की गणना कर उन्हें तालिकाबद्ध किया गया। प्रत्येक क्यारी से मिट्टी नमूना लेकर उसका भौतिक व रासायनिक परीक्षण किया गया।

बीजों में तेल प्रतिशत चन्द्र शेखर आजाद कृषि एवं प्रोद्योगिकी विश्वविद्यालय, कानपुर के कृषि जीव रसायन विभाग में आक्सफोर्ड -4000 एन० एम० आर० यंत्र द्वारा ज्ञात किया गया। खली में प्रोटीन की मात्रा जेल्डाल विधि से निकाली गयी।

परिणाम तथा बिवेचना

सारणी 1 में बुवाई के 90 दिन बाद पौधों की औसत ऊँचाई दर्शायी गयी है जिससे स्पष्ट है कि नाइट्रोजन की अधिकतम मात्रा 60 कि० ग्रा/हे० तथा सूक्ष्मपोषकों के मिश्रण के संकुल घोल का दो बार पर्णीय छिड़काव सर्वाधिक लाभकर है। सूक्ष्मपोषकों की मात्रा का पौधों की ऊँचाई पर काफी अच्छा प्रभाव देखा गया। परिणाम से यह भी स्पष्ट है कि नाइट्रोजन की अधिकतम मात्रा (60 कि० ग्रा०/हे०)सूक्ष्मपोषकों के घोल के पर्णीय छिड़काव का पौधों पर सार्थक प्रभाव होता है। इसी प्रकार का परिणाम सिंह ने अपने अनुसंधान में पाया है। सारणी 1 में प्राथमिक तथा द्वितीयक शाखाओं पर भी नाइट्रोजन की अधिकतम मात्रा तथा सूक्ष्मपोषकों के मिश्रण 5 कि० ग्रा०/हे० तथा घोल के 2 पर्णीय छिड़काव का लाभकारी प्रभाव देखा गया है। सूक्ष्मपोषक मिश्रण का दानों की अपेक्षा घोल का पर्णीय छिड़काव अधिक सार्थक पाया गया। राय तथा कुमार[8] एवं सिंह तथा अन्य[9] ने अपने शोध में इसी प्रकार का प्रभाव देखा है। प्रत्येक क्यारी के पौधों में औसत फलियों की संख्या, फली में दानों की औसत संख्या, पौधों का ताजा भार तथा शुष्क भार में समान प्रकार का प्रभाव देखा गया है। सारणी में नाइट्रोजन का प्रभाव स्पष्ट है और सूक्ष्मपोषक के मिश्रण का प्रभाव उपचारित मात्रा के अनुरूप वृद्धि की ओर है परन्तु दानों की अपेक्षा संकुल घोल का 2 पर्णीय छिड़काव सर्वाधिक सार्थक रहा है। राय तथा कुमार[8] ने तथा सिंह[2] ने अपने प्रयोगों में पाया की सूक्ष्मपोषक तत्वों की अधिक

मात्रा देने से पौधों में दानों की संख्या पर कोई प्रभाव नहीं देखा गया। सबसे कम फलियों की संख्या उपचार संख्या 1 में देखी गयी अर्थात् नाइट्रोजन 40 कि० ग्रा०/है० तथा शून्य सूक्ष्मपोषक मिश्रण के साथ। इसमें सूक्ष्मपोषक तत्व मिश्रण नहीं दिया गया। नाइट्रोजन की कम मात्रा में सूक्ष्म पोषक तत्वों की मात्राओं का उतना प्रभाव नहीं था जितना नाइट्रोजन की अधिकतम मात्रा (60 कि ग्रा०/है०) में सूक्ष्मपोषक मिश्रण की मात्राओं का प्रभाव देखा गया। लेकिन सूक्ष्मपोषक मिश्रण के दानों की अपेक्षा संकुल घोल के छिड़काव का 25% प्रभाव अधिक पाया गया।

सारणी 2

उपचार	औसत 1000 बीज का जाँच भार	उपज (कु०/है०)	बीज में तेल का प्रतिशत	खली में प्रोटीन का प्रतिशत
N_1S_0	2.47	12.67	38.46	27.36
N_1S_1	2.69	13.43	40.53	27.59
N_1S_2	2.69	13.93	41.01	27.3
N_1S_3	2.77	13.87	40.28	27.14
N_1S_4	2.80	14.30	41.16	27.73
N_2S_0	2.86	15.42	43.16	28.48
N_2S_1	3.08	16.17	44.07	28.77
N_2S_2	3.10	17.27	44.41	29.16
N_2S_3	3.12	17.30	44.15	29.57
N_2S_4	3.17	17.18	44.33	30.16
सांख्यिकीय परीक्षण एफ० परीक्षण क्रान्तिक अन्तर	सार्थक	सार्थक	सार्थक	सार्थक
(i) नाइट्रोजन	0.05	0.43	0.05	1.33
(ii) सूक्ष्म पोषक	0.08	0.68	0.08	2.10

सारणी 2 से स्पष्ट है कि राई के दानों की प्रति हेक्टर उपज भी नाइट्रोजन की 60कि० ग्रा०/हे० तथा सूक्ष्म पोषक मिश्रण के 5 कि०/हे० में अधिक पायी गयी जो न्यूनतम से 34.8% अधिक रही। बीजों में सर्वाधिक तेल प्रतिशत नाइट्रोजन की 60 कि० ग्रा०/हे० तथा सूक्ष्म पोषक के 5 कि० ग्रा० दानों के उपचार में देखा गया। ऐसा ही परिणाम राठी तथा अन्य[10] ने अपने शोध प्रयोगों में पाया। खली में प्रोटीन प्रतिशत सर्वाधिक 60 कि० ग्रा० नाइट्रोजन तथा सूक्ष्म पोषक के घोल के दो पर्णीय छिड़काव में पाया गया जो न्यूनतम से 10.2% अधिक रहा।

उपर्युक्त प्रायोगिक शोध कार्य के परिणाम से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि सूक्ष्म पोषक मिश्रण का प्रभाव नाइट्रोजन की 60कि०ग्रा०/हे० में सार्थक है और सूक्ष्मपोषक के दानों की अपेक्षा घोल का पर्णीय छिड़काव पौद वृद्धि, वानस्पतिक विकास, उपज, तेल व प्रोटीन की वृद्धि में सहायक है तथा बीज की गुणवत्ता में अभूतपूर्व सुधार आता है।

निर्देश

1. माइनी, एन० एस०, संधू, जे० एस०, तथा जोहल, के० एस० : इंडिया आयलसीड जर्नल 1964, 8, 11-15, 120-32.

2. सिंह, एस० मेहता, वी० एस० तथा सिंह बी० : जर्नल आफ इंडि० सोसा० आफ स्वायल साइन्स 1988, 34 (3), 535-538.

3. फ्रीमेन, जी० जी०, तथा मोसा देधी एन०, : जर्नल आफ फूड एंड एग्रीकल्चर 1972, 23, 387-402.

4. दुबे, एस० डी०, पाठक, आर० के तथा राय, एम० : आयलसीड न्यूजलेटर, 1978, 2(8), 2-8.

5. हेमन्त राजन, ए० : जर्नल आफ प्लान्ट न्यूट्रीशन 1988, 11 (6-11), 829-482.

जोर्डर एम०; पाल, एम० के० तथा घोष, एस० के० : इक्सपेरिमेन्टल एग्रीकल्चर 1979, 5 (3), 299-302.

6. इन्दो, आर० एम०, फोरनासिरी कोल, जी, माले हेरीस, इ० वी० तथा फोरनासिरी, जे० एल०. : साईटीफिका 1988, 16(1), 141-150.

7. चन्देल, ए० एस०, तिवारी, एस० के० तथा सक्सेना, एस० सी० : इन्डियन जर्नल आफ एग्रीकल्चरल साइन्स 1989, 59 (1), 62-63.

8. राय, बी०, तथा कुमार, ए० : इन्डियन फार्मिंग, फरवरी 1981.

9. सिंह, एच० जी०, सिंह, वंशराज, गुप्ता, पी० आर० तथा गोयल, आर० डी० : एग्रोनामी जर्नल, 1972, 6(2), 107-110.

10. राठी, ओ० पी०, तथा चन्देल, आर० एस० : हरियाणा एग्री० यूनि० जर्नल आफ रिसर्च 1977, 7 (4), 173-177.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 2, April, 1999.

सार्वीकृत H-फलन एवं केल्विन फलन के युग्मों के गुणनफल के लिये G-समाकलन

आर. के. जैन तथा ए. के. रोंघे

गणित विभाग, एस. एस. एल. जैन स्नाकोत्तर महाविद्यालय, विदिशा (म. प्र.)

[प्राप्त-मई 8, 1998]

सारांश

प्रस्तुत शोध प्रपत्र में सार्वीकृत H-फलन एवं केल्विन फलन के युग्मों के गुणनफल के लिये G-समाकलन कुछ प्रमेयों के रूप में इक्स्टोन के परिणामों का प्रयोग कर स्थापित किया गया है। कुछ ज्ञात एवं अज्ञात परिणामों को विशिष्ट दशाओं में दर्शाया गया है।

Abstract

Generalized integrals for product of pair of Kelvin and generalized H-functions. *By* R. K. Jain and A. K. Ronghe, Department of Mathematics, S. S. L. Jain Post Graduate College, Vidisha (M. P.)

In the present paper, we evaluate some theorem on generalized integrals for a product of pair of Kelvin and generalized H-functions by using results of Exton. Some new and known results have been shown as particular cases.

1. प्रस्तावना

सक्सेना के सार्वीकृत H-फलन[5] जो कि I-फलन द्वारा जाना जाता है, जिसके गुणधर्मों का अध्ययन वैश्य, जैन तथा वर्मा[7] के शोधपत्रों में किया गया है, उस सार्वीकृत H-फलन को निम्न प्रकार से प्रस्तुत कर रहे हैं।

$$I[x] = I^{m,l}_{p_i, q_i : r}\left[x \,\middle|\, \begin{matrix} \phi_1, \phi_2 \\ \phi_3, \phi_4 \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi w} \int_{-\infty w}^{\infty w} \theta(s) x^s \, ds, \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\phi_1 = [(a_j, \alpha_j)_{1,l}]$$

$$\phi_2 = [(a_{ji}, \alpha_{ji})]_{l+1}, p_i$$

$$\phi_3 = [(b_j, \beta_j)_{1,m}]$$

$$\phi_4 = [(b_{ji}, \beta_{ji})]_{m+1}, q_i$$

और

$$w = \sqrt{-1}$$

$$\theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - \beta_j s) \prod_{j=1}^{l} \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s)}{\sum_{i=1}^{r} \left[\prod_{j=m+1}^{q_i} \Gamma(1 - b_{ji} + \beta_{ji} s) \prod_{j=l+1}^{p_i} (a_{ji} - \alpha_{ji} s) \right]}, \tag{1.2}$$

समाकलन (1.1) पूर्ण अभिसारी है जब $|arg\ (z)| < \frac{1}{2} B\pi$, $(B > 0 < A < 0)$

जहाँ

$$B = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j - \sum_{j=l+1}^{p_i} \alpha_{ji} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \sum_{j=m+1}^{q_i} \beta_{ji}, \tag{1.3}$$

$$A = \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{ji} - \sum_{j=1}^{q_i} \beta_{ji}, \forall\, i \, \varepsilon \, (1, \dots r) \tag{1.4}$$

पूर्णांक है जिनसे

$$p_i\ (i = 1, \dots r),\ q_i\ (i = 1, \dots r),\ m, n$$

$$0 \le n \le p_i,\ 0 \le m \le q_i\ (i = 1, \dots r)$$

तुष्टि होती है, r सान्त है,

तथा α_j, β_j α_{ji}, β_{ji} सम्मिश्र संख्यायें है।

ये ऐसी सम्मिश्र संख्यायें हैं कि

$a_j\ (b_h + v) \neq \beta_h\ (a_j - 1 - k)$ क्योंकि $v, K = 0, 1, 2 \ldots.$

जब $r = 1$, तो सार्वीकृत H-फलन फाक्स H-फलन में बदल जायेगा।

2. सार्वीकृत समाकलन

इस अनुभाग में निम्नलिखित ज्ञात सार्वीकृत समाकलन का प्रयोग जो कि इक्स्टोर्न[1] द्वारा प्राप्त किये गये हैं, प्रमेयों को स्थापित करने में किया गया है। जहाँ G सार्वीकृत को दर्शाता है।

$$G \int_0^\infty x^u \ \mathrm{ber}(\alpha x),\ \mathrm{ber}(\beta x)\, dx$$

$$= (2\alpha)^{-u-1}\ \Gamma\left[\begin{matrix} u+1,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/4,\ 3/4 \\ (u+2)/4, (u+3)/4, (u+4)/4, (1-u)/4, (1-u)/4, (3-u)/4 \end{matrix}\right]$$

$$\times\ {}_4F_3\left[\begin{matrix} (u+1)/4, (u+1)/4, (u+3)/4, (u+3)/4 \\ 1/2,\ 1/2,\ 1; \end{matrix}\ (\beta/\alpha)^4\right]$$

जब

$$\alpha > \beta,\ u > -1, \qquad (2.1)$$

यदि (2.1) में $\mathrm{ber}(\alpha x)$ का $\mathrm{ber}(\beta x)$ से स्थान परिवर्तित करें तो

$$G \int_0^\infty x^u \ \mathrm{ber}(\beta x),\ \mathrm{ber}(\alpha x)\, dx$$

$$= (2\beta)^{u-1}\ \Gamma\left[\begin{matrix} u+1,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/4,\ 3/4 \\ (u+2)/4, (u+3)/4, (u+4)/4, (1-u)/4, (1-u)/4, (3-u)/4 \end{matrix}\right]$$

$$\times\ {}_4F_3\left[\begin{matrix} (u+1)/4, (u+1)/4, (u+3)/4, (u+3)/4 \\ 1/2,\ 1/2,\ 1; \end{matrix}\ (\alpha/\beta)^4\right]$$

जब

$$\beta > \alpha,\ u > -1, \tag{2.2}$$

$$G \int_0^\infty x^u \ \mathrm{bei}\,(\alpha x),\ \mathrm{bei}\,(\beta x)\, dx$$

$$= (2\alpha)^{-u-3}\, \frac{\beta^2}{64}\, \Gamma\left[\begin{matrix}(u+5),\ 3/2,\ 3/2,\ 1/4,\ 1/2,\ 3/4 \\ (u+6)/4, (u+7)/4, (u+8)/4, (1-u)/4, (1-u)/4, (1-u)/4\end{matrix}\right]$$

$$\times\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}(u+3)/4, (u+3)/4, (u+5)/4, (u+5)/4 \\ 3/2,\ 3/2,\ 1;\end{matrix}\ (\beta/\alpha)^u\right]$$

जब $$\alpha > \beta,\ u > -3, \tag{2.3}$$

$$G \int_0^\infty x^u \ ber\,(\alpha x),\ bei\,(\beta x)\, dx$$

$$= \frac{(2\beta)^{-u-1}}{16}\, \Gamma\left[\begin{matrix}(u+3),\ 3/2;\ 3/2,\ 1/4,\ 3/4,\ 1/2 \\ (u+4)/4, (u+5)/4, (u+6)/4, (3-u)/4, (3-u)/4, (1-u)/4\end{matrix}\right]$$

$$\times\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}(u+3)/4, (u+3)/4, (u+1)/4, (u+1)/4 \\ 1/2,\ 1/2,\ 1;\end{matrix}\ (\beta/\alpha)^4\right]$$

जब $$\alpha > \beta,\ u > -1. \tag{2.4}$$

3. इस अनुभाग में आठ प्रमेयों का (2.1) से (2.4) की सहायता से स्थापति करते हैं जो निम्नवत् हैं तथा A और B क्रमशः (1.4) और (1.3) में परिभाषित हैं तथा सार्वीकृत समाकलन के सभी प्रमेय मात्र समधनात्मक पूर्णांक को सन्तुष्ट करते हैं। अन्य को नहीं।

$$G \int_0^\infty x^u \ ber\,(\alpha x)\, ber\,(\beta x)\, I\,[x^{u_1}]\, dx$$

$$= BER \uparrow (\alpha, \beta, u \pm u_1) \times I^{m, l+5}_{p_i+8, q_i+7, r} \left[(x \,.\, 2\alpha)^{-\mu_1} \left| \begin{matrix} V_1 \\ R_1 \end{matrix} \right. \right] \quad (3.1)$$

जहां V_1 और R_1 प्राचलों का समुच्चय है, जो इस प्रकार है।

$$V_1 : [(-u; u_1), (3-u-4k)/4; u_1/4), (3-u-4k)/4, u_1/4)$$

$$(1 + u + 4k)/4; u_1/4), (1 + u + 4k)/4; u_1/4)\ \phi_1, \varphi_2]$$

$$R_1 : [\,(1-u)/4; u_1/4],\ [\,(3-u)/4; u_1/4), (1-u)/4; u_1/4), \phi_3, \varphi_4$$

$$(-u/4; u_1/4), (1/2 + u/4); u_1/4),(1/2 + u/4; u_1/4), (1-u)/4; u/4)$$

$$(1/2 + u/4; u_1/4)\ (1 - u/4; u_1/4)\ (1-u)/4; u_1/4), \quad (3.2)$$

तथा

$$BER \uparrow (\alpha, \beta, u + \mu_1) = 2^{\mu \quad 1} \sum_{k \quad 0} (\beta/\alpha)^{4k} \frac{\{\Gamma(1/2)\}^3\, \Gamma(1/4)\, \Gamma(3/4)}{k!\, \langle (1/2)_k \rangle^2\, (1)_k} \quad (3.3)$$

परिणाम (3.1) निम्नलिखित प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है–

$$u > -1, \alpha > \beta, \arg |(x)| < \frac{1}{2} B\pi, \ \mathrm{Re}\, [u + u_1(a_j/\alpha_j)] > -1,$$

$$G \int_0^\infty x^u\ ber(\alpha x)\, ber(\beta x)\, I\,[x^{\quad u_1}]\, dx$$

$$= BER \uparrow (\alpha, \beta, u \pm u_1) \times I^{m+5, l}_{p_i+7, q_i+8, r} \left[(x \,.\, 2\alpha)^{\mu_1} \left| \begin{matrix} V_2 \\ R_2 \end{matrix} \right. \right] \quad (3.4)$$

जहाँ V_2 और R_2 प्राचलों का समुच्चय है जो निम्नवत् है।

$$V_2 : \phi_1, \varphi_2 [(1 + u; u_1), \ (1 + u + 4k)/4; \ u/4), \ (1 + u + 4k)/4; u_1/4)$$

$$(3 + 4)/4 + k; \ u_1/4), \ (3 + u)/4 + k; u_1/4)]$$

$$R_2 : \phi_4, [(2 + u)/4; u_1/4), \ (3 + u)/4; (u_1/4), (4 + u)/4; \ u_1/4),$$

$$(1 - u/4; u_1/4) \ (1 + u)/4; u_1/4), \ (3 + u)/4; \ u_1/4), \ (3 + u_1/4; u_1/4] \ \phi_3$$

$$(u)/4; u_1/4) \ (u/4; u_1/4), (-2 + u)/4; u_1/4)] \tag{3.5}$$

तथा $BER\,(\alpha, \beta, u \pm u_1)$ का आश्यय समीकरण (3.3) में दिया हुआ है। परिणाम (3.4) निम्नलिखित प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है—

$$u > -1, \ \alpha > \beta, \ \mathrm{Re}\,(u - u_1\,(a_j/\alpha_j)] > -1,$$

$$G \int_0^\infty x^u \, ber\,(\beta x)\, ber\,(\alpha x) I\,[x^{u_1}]\, dx$$

$$= BER \uparrow (\alpha, \ \beta, \ u \pm u_1) \times I^{m,\, l+5}_{p_i + 8,\, q_i + 7,\, r} \left[(x \,.\, 2\beta)^{-u_1} \middle| \begin{matrix} V_1 \\ R_1 \end{matrix} \right] \tag{3.6}$$

जहाँ V_1 और R_1 प्राचलों का समुच्चय है जो समीकरण (3.2) में दिया है। और

$$BER \uparrow (\alpha, \beta, u \pm u_1) = (2\beta)^{\ u \quad 1} \sum_{k \quad 0}^{\infty} (\alpha/\beta)^{4k} \ \frac{\{\Gamma\,(1/2)\}^2\, \Gamma\,(1/4)\, \Gamma\,(3/4)}{k\,!\, \langle\, \Gamma(1/2)_k\, \rangle^2\, (1)_k} \tag{3.7}$$

परिणाम (3.6) निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है—

$$U > -1, \ \beta > \alpha, \ \mathrm{Re}\,(u + u_1\,(a_j/\alpha_j) > -1, \ \arg\,(x) < \frac{1}{2} B\pi,$$

$$G \int_0^\infty x^u \, ber\,(\beta x), ber\ \ (\alpha x)\, I\,[x^{\ \ u_1}]\, dx$$

$$= BER \uparrow (\alpha, \beta, \mu \pm u_1) \times I^{m+5, l}_{p_i+7, q_i+8, r} \left[(x . 2\beta)^{u_1} \middle| \begin{matrix} V_2 \\ R_2 \end{matrix} \right] \quad (3.8)$$

जहाँ V_2 और R_2 प्राचलों के समुच्चय है जो समीकरण (3.5) में दिया है। परिणाम (3.8) निम्नलिखित प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है।

$$u > -1, B > \alpha, \text{और } \mathrm{Re}\,(u + u_1 (a_j/\alpha_j)] > -1,$$

$$G \int_0^{\infty} x^u \, bei\,(\alpha x)\, bei\,(\beta x)\, I\,(x^u)\, dx$$

$$= BERI \uparrow (\alpha, \beta, u \pm u_1) \times I^{m, l+5}_{p_i+8, q_i+7, r} \left[(x . 2\alpha)^{-u_1} \middle| \begin{matrix} V_3 \\ R_3 \end{matrix} \right] \quad (3.9)$$

V_3, R_3 प्राचलों का समुच्चय है जो निम्न प्रकार है—

$$V_3 : [(-4-u; u_1),\ (1-u+4k)/4;\ u_1/4),\ (1-u+uk)/4;\ u_1/4)$$

$$(-1-u+uk)/4;\ u_1/4),\ (-1-u+4k)/4;\ u_1/4),\ \phi_1\ \phi_2$$

$$R_3 : (-2-u)/4; u_1/4), (-3-u/4; u_1/4)\ (1-u)/4; u_1/4), (1-u)/4; u_1/4)$$

$$(1-u)/4; u_1/4), (1+u)/4; u_1/4)\ (1+u)/4; u_1/4)\ \phi_3, \phi_4$$

$$(1-u)/4; u_1/4),\ (1-u)/4;\ u_1/4),\ (1-u)/4;\ u_1/4) \quad (3.10)$$

और

$$BEi \uparrow (\alpha, \beta, u \pm u_1) = (2\alpha)^{-u-3} \frac{\beta^2}{64} \sum_{k=0}^{\infty} (\beta/\alpha)^{4k}$$

$$\times \frac{(\Gamma\,(3/2)^2\, \Gamma\,(1/4)\, \Gamma(1/2)\, \Gamma\,(3/4)}{|(3/2)_k|^2\,(1)_k} \quad (3.11)$$

परिणाम (3.9) में निम्नलिखित प्रतिबंध लागू होते हैं।

$\alpha > \beta,\ u > -3,$ और $\mathrm{Re}\,[u + u_1\,(a_j/\alpha_j) > -3,$

$$G\int_0^\infty x^u\, bei\,(\alpha x),\, bei\ (\beta x)\, I\,[x^{u_1}]\, dx$$

$$= BEI \uparrow (\alpha,\ \beta,\ u \pm u_1) \times I^{m+5,\, l}_{p_i+7,\, q_i+8;\, r}\left[(x\,.\,2\alpha)^{u_1}\,\middle|\,\begin{matrix} V_4 \\ R_4 \end{matrix}\right] \qquad (3.12)$$

जहाँ V_4 और R_4 प्राचलों का समुच्चय है जो इस प्रकार है—

$V_4 : \phi_1,\ \phi_2\ (5 + u;\ u_1),\ (3 + u + 4k)/4;\ u_1/4),\ (3 + u + 4k)/4;$

$u_1/4),\ (5 + u + 4k)/4;\ u_1/4),\ (5 + u + 4k)/4;\ u_1/4),$

$R_4 : (3 + u)/4;\ u_1/4),\ (3 + u)/4;\ u_1/4),\ (3 + u)/4;\ u_1),\ \phi_3,\ \phi_4$

$(6 + u)/4;\ u_1/4),\ (7 + u)/4;\ u_1/4),\ (8 + u)/4;\ u_1/4),\ (3 + u)/4;\ u_1/4$

$(3 + u)/4;\ u_1/4),\ (5 + u/4)\ u_1/4),\ (5 + u)/4;\ u_1/4)$ (3.13)

$BEI \uparrow (\alpha, \beta, u \pm u_1)$ का अर्थ समी० (3.11) में अन्य सभी इसके प्रतिबंध (3.9) को ही संतुष्ट करेंगे। शेष निम्नवत् हैं—

$\mathrm{Re}\,(u - u_1\,(a_j/\alpha_j)] > -3,$

$$G\int_0^\infty x^u\, ber\,(\alpha x)\, bei\,(\beta x)\, I\,[x^{u_1}]\, I\, dx$$

$$= BER \uparrow (\alpha,\ \beta,\ u \pm u_1) \times I^{m,\, l+5}_{p_i+8,\, q_i+7;\, r}\left[(x\,.\,2\beta)^{u_1}\,\middle|\,\begin{matrix} V_5 \\ R_5 \end{matrix}\right] \qquad (3.14)$$

जहाँ V_5 और R_5 प्राचलों का समुच्चय है, जो निम्नवत् है।

$V_5 : (-2-u; u_1), (1-u-4k)/4, u_1/4), (1-u-4k)/4; u_1/4)$

$(-u-uk)/4; u_1/4), (-u-uk)/4, u_1/4)\ \phi_1, \phi_2$

$R_5 : (-3-u)/4; u_1/4), (3-u)/4; u_1/4), (1-u)/4; u_1/4)\ \phi_3, \phi_4$

$(-u/4; u_1/4), (-1-u)/4; u_1/4), (1-u)/4; u_1/4), (1-u)/4; u_1/4)$

$$(-2-u)/4 ; u_1/4), (3-u)/4; u_1/4), (3-u)/4; u_1/4), \tag{3.15}$$

परिणाम (3.14) निम्नलिखित प्रतिबंधों के अनुरूप है।

$\alpha > \beta,\ u > -1,$ और $\operatorname{Re}(u + u_1 (a_j/\alpha_j)] > -1$

तथा

$$BER \uparrow (\alpha, \beta, u \pm u_1) = (2\beta)^{u\ \ 1} \left(\frac{1}{16}\right) \sum_{k\ \ 0} (\beta/\alpha)\ \frac{4k_1}{k!}$$

$$\times \frac{\{\Gamma(3/2)\}^2\ \Gamma 1/4\ \Gamma 3/4)}{[(1/2)_k]^2 (1)_k} \tag{3.16}$$

$$G \int_0^\infty x^u\, ber\,(\alpha x)\, bei\,(\beta x)\, I\,[x^{\mu_1}]\, dx$$

$$= BER \uparrow (\alpha, \beta, u \pm u_1) \times I^{m+5, l}_{p_i+7, q_i+8; r} \left[(x \cdot 2\beta)^{u_1} \,\middle|\, \begin{matrix} V_6 \\ R_6 \end{matrix} \right] \tag{3.17}$$

जहाँ V_6 और R_6 प्राचलों का समुच्चय है, जो निम्नवत् है।

$V_6 : \phi_1, \phi_2, (3+u); u_1), (3+u+4k)/4; u_1/4), (3+u+4k)/4; u_1/4)$

$(1+u+k)/4; u_1/4), (1+u+4k)/4; u_1/4),$

$R_6 : (u+4)/4; u_1/4), (4+5)/4; u_1/4), (6+u)/4; u_1/4)$

$(3+u)/4; u_1/4), (3+u)/4; u_1/4)\ (1+u)/4; u_1/4)$

$(1+u)/4; u_1/4), \phi_3, \phi_4, (3+u)/4, u_1/4)\ (1+u)/4; u_1/4$

$(1+u)/u; u_1/u),$ (3.18)

औ र $BER\,(\alpha, \beta\, u \pm u)$ का अर्थ समीकरण(3.16) मे दिया है तथा प्रतिबं ध $\alpha > \beta$, $u > -1$, $\text{Re}\,[u - u_1\,(a_j/\alpha_j)] > -1$ है।

उपपत्ति : प्रमेय (3.1) को सिद्ध करने के लिये हम वाम पक्ष को I द्वारा अंकित करते हैं। सार्वीकृत H-फलन की सहायता से एकल कंटूर समाकलन के रूप में लिखते हैं। अब (2.1) की सहायता से तथा आन्तरिक समाकलन क्रम को परिवर्तित करने, पर जो कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध और अभिसारी है, हमें निम्न सार्वीकृत समाकलन प्राप्ति होती है।

$$I = \frac{1}{2\pi w} \int_{-\infty w}^{\infty w} \theta(x) \left\{ G \int_0^{\infty} x^{u+u_1 s}\ ber\,(\alpha x)\, ber\,(\beta x)\, dx \right\} x^s\, ds$$

अब (2.1) की सहायता से आन्तरिक समाकलन का मान प्राप्त कर परिणाम की विवेचना (1.1) से करने पर (3.1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है।

इसी प्रकार प्रमेय (3.6), (3.12), (3.16) को (2.2), (2.3) एवं (2.4) के प्रयोग से प्राप्त कर सकते हैं।

4. विशिष्ट दशाएँ : इस अनुभाग में हम कुछ नये प्रमेय प्राप्त करेंगे।

(i) यदि हम (3.1) में $r = 1$ रखें तो सार्वीकृत H-फलन, फाक्स के H-फलन में समानीत हो जाता है।

$$G \int_0^{\infty} x^u\ ber\,(\alpha\,(\alpha x)\, ber\,(\beta x)\, I^{m,\,l}_{p_i,\,q_i\,;\,l} \left[z x^{u_1} \right] dx$$

$$= Ber \uparrow (\alpha,\ \beta,\ u + u_1) \times H^{m+5,\,l}_{p_i+8,\,q_i+7} \left[(x\,.\,2\alpha)^{-u_1} \middle| \begin{matrix} V_1 \\ R_1 \end{matrix} \right] \qquad (4.1)$$

V_1 एवं R_1 का आशय समीकरण (3.2) में दिया है और ϕ_2 और ϕ_4 को बिलोप किया गया है तथा $ber \uparrow (\alpha,\ \beta 4 + u_1)$ भी समी. (3.3) में दिया है।

(ii) यदि सार्वीकृत फलन से युक्त समीकरण (3.1) में हम तथा $r = 1$ रखें तो परिणाम माइजर G-फलन में बदल जायेगा।

$$\alpha_j = \alpha_{il} = \beta_j = \beta_{jl} = c, \; (i + 1, \ldots p_i, \; j = 1 \ldots q_i)$$

$$G \int_0^{\infty} x^u \; ber(\alpha x) \, ber(\beta x) \, I^{m,l}_{p_i, q_i; l} \left[x^4 \right] dx$$

$$= BeR \uparrow (\alpha, \beta, u \pm u_1) \times \frac{1}{c} \, G^{m, l+5}_{p_i + 8, q_i + 7} \left[(x \cdot 2x)^{-u_1/c} \left| \begin{matrix} V_1 \\ R_1 \end{matrix} \right. \right]$$

और सभी अन्य परिस्थितियाँ (3.1) को सन्तुष्ट करती हैं।

(iii) यदि परिणाम (3.1) में $r = 1, m = 0, h = p_1 = q_x = l = \alpha_1 - \beta_1 - 1$ रखें a_1 के स्थान पर $2m - a + 1$ के स्थान पर $k + m - a + 1/2$, तथा के स्थान पर $1/x$ तो परिणाम मेकरार्बट फलन में बदल जायेगा।

इसी प्रकार अन्य परिणाम भी प्राप्त किये जा सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

सहायता के लिये लेखकगण गणित के प्रोफेसर डॉ. हैरोल्ड इक्स्टोन (यू० के०) के आभारी हैं जिन्होंने अपने शोधपत्रों को भेज कर मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. इक्स्टोन, एच० : Sepa, der, Anai, da faculdade, de cie, do Porto, 1983 LXIV- Far 10, 40, 46.

2. फाक्स. सी., : Trans. Amer. Math. Soc. 1961. 98, 395-429.

3. मेइजर, सी. एस. : Nederl. Acad. Wetenach Proc. 1946-49, 227-237.

4. रेनविले, ई. : Special function, MacMillan (1960), N. Y.

5. सेक्सेना, वी. पी., : Proc, Nat, Acad. India 1982, 52, 366-75.

6. शर्मा, सी. के. तथा अहमद, एस. सी., : Math. Stu., 1995.

7. वैश्य, जी. डी., रेनू जैन तथा वर्मा, आर. सी., : Proc. Nat. Acad. Sc. Indi, 1989, 59 (A) II, 329-337.

/ijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 2, April, 1999.

मंडलीय बहुपद वाले मैट्रिक्स कोणांक का लागेर बहुपद

प्रद्योत कुमार मिश्रा तथा पी. एल. सेठी

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जयनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त-फरवरी 9, 1998]

सारांश

इस प्रपत्र में कान्सैन्टीन तथा सुब्रमन्यन द्वारा दिये गये परिणामों की सहायता से कांस्टैन्टीन तथा जेम्स द्वारा प्रदत्त मैट्रिक्स कोणांक के लागेर बहुपदों से सम्बद्ध कतिपय समाकलों का मान ज्ञात किया गया है। इन प्रमेयों से अनेक समाकल निगमित किये गये हैं।

Abstract

Lauguere polynomial of matrix argument with zonal polynomial. *By* Pradhyot K. Mishra and P. L. Sethi, Department of Mathematics & Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur (Rajasthan).

In this paper some integrals associated with Laguerre polynomials of matrix argument due to Constantine[1] and James [2-4] have been evaluated with the help of the results given by Constantine[1] and Subrahmanian[10]. A number of integrals have been deduced from these theorems. These integral formulae are applicable to various problems in multivariate distribution theory. It is also found useful in solving problems based on integral equations.

The present study is in a way an extension, to the line of approach initiated by Constantine[1], Mathai & Saxena[6] and Subrahmanian[10]

1. प्रस्तावना

इस प्रपत्र में हमने धन संमितीय निश्चित मैट्रिक्स के लागेर बहुपद वाले कतिपय नवीन समाकलों का सूत्रपात किया है।

समय-समय पर अनेक लेखकों ने विशिष्ट फलनों के मैट्रिक्स सिद्धान्त की विवेचना की है[1-4, 6, 9] हाल ही में मथाई[5, 6] ने कतिपय विशिष्ट फलनों के मैट्रिक्स सिद्धान्त पर समीक्षात्मक निबन्ध लिखा है।

2. संकेतन

समस्त मैट्रिक्सों को $p \times p$ संमित धन निश्चित माना गया है। जब तक कुछ कहा न जाय $S, T, R > 0$ तथा S, T, तथा R धन निश्चित होगा, Re (.) का अर्थ है (.) का असली अंश, $\int_0^1 (.)$ का अर्थ है (.) समाकलित हुआ $p \times p$ संमित मैट्रिक्स S, इस तरह कि $S > 0$ तथा $I - S > 0$ कि S के समस्त आइगेनमानों में तथा 0 एवं 1 के मध्य हें। संकेतन ‖ (.) ‖ सचक है (.) के नामों के लिए। चूँकि यहाँ पर मैट्रिक्स संमित धनात्मक निश्चित हैं अतः सर्वाधिक आइगेनमानों को नामों के रूप में लिया जा सकता है। | (.)| सूचक है (.) के निर्धारण के लिए, tr (.) सूचक है (.) के लेश के लिए जो (.) के प्रमुख विकर्ण तत्वों का योगफल है।

3. क्षेत्रीय बहुपद

मैट्रिक्स S तथा विविध प्रकार के बहुपद का कतिपय संमित विवरण तथा सिद्धन्त का विकास मथाई, प्रोवोस्ट तथा हयकावा (1995) से प्राप्त होता है। $p \times p$ असली संमित धनात्मक निश्चित मैट्रिक्स g(x) पर विचार करें। माना कि $p \times p$ संमित मैट्रिक्स X के $p(p + 1)$ विभिन्न तत्वों में k डिग्री वाले समांग बहुपद X का वेक्टर समष्टि है। व्युत्क्रमणीय $p \times p$ मैट्रिक्स के द्वारा $X \to L \times L'$ सर्वांगसम रूपान्तररण पर विचार करें। उपसमष्टि $V_s \subset V_k$ lTk'Fk[Aßc\kkPm cw यदि $L V_s \subset V_s$ समस्त व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्सों के लिए। यदि Vs का कोई उचित निश्चर उपसमष्टि नहीं होता तो यह अखंडनीय निश्चर उपसमष्टि कहलाता है। यह दिखलाया जा सकता है कि अखंडनीय निश्चर उपसमष्टि V_k के प्रत्यक्ष योगफल में खण्डित हो जाता है जो विभागों $K = (k_1, k_2 \ldots k_p)$, $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_p \geq 0$ के संगत p भागों से अधिक सं प्रत्येक उपसमष्टि में अद्वितीय एक आयामी उपसमष्टि निश्चर होता है। रैखिक रूपान्तरणों के लाम्बिक समूह के अन्तर्गत –1k ये उपसमष्टि मण्डलीय बहुपदों द्वारा उपत्पन्न होते हैं जो समान्य बनाये जाने पर मंडलीय बहपद $C_k(X)$ प्रदान करते हैं। इन बहुपदों के स्पष्ट रूप के लघु मानों के लिए प्राप्य हैं। के दीर्घमान के लिए इन बहुपदों को आकलित करना अति कठिन होगा। मैट्रिक्स कोणांक के सरल विशिष्ट फलनों की विवेचना के लिए इन मंडलीय बहुपदों के कुछ गुणों की आवश्यकता होती है। ये गुण बाद में विवेचना किये जाने वाले परिणाम को स्थापित करने के लिए पर्याप्त होंगे। परिभाषा के परिणामनस्वरूप जो मूल परिणाम प्राप्त होता है वह है कि एक। X। मैट्रिक्स है-अर्थात् अदिश मात्रा है।

$$C_k(X) = x^k \tag{3.1}$$

अतः $C_k(X)$ को x^k एक सार्वीकरण के रूप में देखा जा सकता है चरघातांकी फलन का प्रसार निम्नवत् है।

$$e^{tr(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [tr(X)]^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{C_k(X)}{x!} \tag{3.2}$$

$I - X > 0$ के लिए द्विपद प्रसार निम्नवत् है अर्थात् $X = X' > 0$ तथा X के समस्त आइगेन मान 0 तथा 1 के मध्य हैं।

$$|I - X|^{\;u} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{(a)_k}{k!} C_k(X) \tag{3.3}$$

जहाँ

$$(a)_k = \prod_{j=1}^{p} \left(\alpha - \frac{(\dot{J} - 1)}{2} \right)_{k_j} \tag{3.4}$$

जिसके साथ

$$K = \left(k_1, \ldots, k_p \right),\; k_1 \geq, \ldots, \geq k_p \geq 0$$

$$\int_{0(p)} C_k(H' \times HT)\, dH = C_k(X)\, C_k(T) / C_k(I) \tag{3.5}$$

जहाँ I तत्समक मैट्रिक्स है, समाकल $p \times p$ मैट्रिक्सों के लाम्बिक समूह के ऊपर है तथा dH निश्चर हार माप है।

4. आगे जिस परिणाम की आवश्यकता पड़ेगी

निम्नांकित परिणाम सुब्रामन्यन[10] के हैं,

$$\text{(i)} \int_{S>0} etr(-RS)\, |S|^{\,t - \frac{(p+1)}{2}}\, C_k(ST)\, dS = \Gamma_p(t, K)\, |R|^{-t}\, C_k(R^{-1}T) \tag{4.1}$$

जहाँ $C_k(S)$ क्षेत्रीय बहुपद है जो खण्डों $K = (k_1, \ldots, k_p)$ के संगत है; $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq 0$ पूर्णांक k का, t जटिल संख्या है जिससे $\text{Re}(t) > \frac{p-1}{2}$ की तुष्टि होती है तथा

$$\Gamma_p(t, K) = \pi^{p\frac{(p-1)}{4}} \prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(t + k_j - \frac{(j-1)}{2}\right) \tag{4.2}$$

समाकलन $p \times p$ धन निश्चित संमिति मैट्रिक्सों के अवकाश में है। एक जटिल संमित मैट्रिक्स ट तथा यादृच्छिक जटिल संमित मैट्रिक्स ¬ के लिए

(ii)
$$\int_{s>o} etr(-ZS)\,|S|^{t-\frac{(p+1)}{2}}\, C^k(TS^{-1})\, dS = \Gamma_p(t, K)\,|Z|^{-t}\, C_k(ZT) \tag{4.3}$$

जहाँ

$$\mathrm{Re}(t) > \frac{p-1}{2} + k_1,\; Z = Z' > 0;\; T = T' > 0,\; \mathrm{Re}(Z) > 0$$

(iii)
$$\int_{s>0} |S|^{t-\frac{(p-1)}{2}}\, |I+S|^{-(t+u)}\, C_k(RS)\, dS = \frac{\Gamma_p(t, K)\,\Gamma_p(u, -k)}{\Gamma_p(t+u)}\, C_k(R) \tag{4.4}$$

जहाँ

$$\mathrm{Re}(t) > \frac{p-1}{2},\; \mathrm{Re}(u) > \frac{p-1}{2} + k_1 \text{ तथा } R = R' > 0,\; \mathrm{Re}(R) > 0$$

(iv)
$$\int_{s>0} |S|\, t - \frac{(p-1)}{2}\, |I+S|^{-(t+u)}\, C_k(R\,S^{-1})\, ds = \frac{T_p(t, -k)\, T_p(uk) \times (t+u)}{\Gamma_p(t+u)} \tag{4.5}$$

टाइप-I बीटा समाकल को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है-

(v)
$$\int_{s>0} |S|^{t-\frac{(p-1)}{2}}\, |I-S|^{u-\frac{(p+1)}{2}}\, C_k(RS)\, dS = \frac{\Gamma_p(t, K)\,\Gamma_p(u)}{\Gamma_p(t+u, K)}\, C_k(R) \tag{4.6}$$

तथा

(vi)
$$\int_{s>0} |S|^{t-\frac{(p-1)}{2}}\, |I-S|^{u-\frac{(p+1)}{2}}\, C_k(RS^{-1})\, dS = \frac{\Gamma_p(t, -K)\,\Gamma_p(u)}{\Gamma_p(t+u, -K)}\, C_k(R) \tag{4.7}$$

क्योंकि

$$\mathrm{Re}(t) > \frac{p-1}{2} + k_1;\; \mathrm{Re}(u) > \frac{p-1}{2};\; \mathrm{Re}(t+u) > \frac{p-1}{2} + k_1,\; k = k' > 0$$

फलस्वरूप

$$\frac{\Gamma_p(t, -K)}{\Gamma_p(t)} = \frac{(-1)^k}{\left(\frac{p+1}{2} - t\right)_k} \tag{4.8}$$

परिणाम (4.8) प्रत्यक्ष सार्वीकरण है मैट्रिक्स चर दशा के फल [1960, p. 23, p. 32] का।

5. मुख्य परिणाम

प्रमेय 1. यदि R तथा T यादृच्छिक जटिल संमित मैट्रिक्स हों तो हमें सिद्ध करना है कि

$$\int_{s>o} etr\,(-RS)\,|S|^{t-\frac{(p+1)}{2}}\, L_\beta^{(\alpha)}(ST)\; dS$$

$$= \Gamma_p(t, K)\,|R|^{-t}\,\frac{\Pi_p(\alpha+\beta)}{\Pi_p(\alpha)}\; {}_1F_1\left(-\beta;\, \alpha + \frac{p+1}{2};\, R^{-1}T\right) \tag{5.1}$$

जहाँ

$$\mathrm{Re}\,(t) > \frac{p-1}{2},\; R = R' > 0,\; T = T' > 0,\; \|R\| < 1,\; \|T\| < 1$$

यहां पर मैट्रिक्स कोणांक का लागेर बहुपद

$$L_\beta^{(\alpha)}(ST)\, dS = \frac{\Pi_p(\alpha+\beta)}{\Pi_p(\alpha)}\; {}_1F_1\left(-\beta;\, \alpha + \frac{p+1}{2};\, ST\right) \tag{5.2}$$

के रूप में दिया जाता है तथा

$${}_1F_1(\alpha : \beta : X) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k} \frac{(\alpha)_k\, C_k(X)}{(\beta)_k\; k!} \tag{5.3}$$

संगामी हाइपरज्यामितीय फलन है मैट्रिक्स कोणांक का ।।

तथा

$$\Pi_p(\alpha) = \Gamma_p\left(\alpha + \frac{p+1}{2}\right)$$

उपपत्ति - यह समाकल तत्समक सिद्ध किया जाता है निरूपण

$$C_k(S) = d_{k,k} |S|^{k_1 - k_2}, \ldots, |S_p|^{k_p} \tag{5.4}$$

पर विचार करके जहाँ

$$S_r = \left(S_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, r \right)$$

अपरंच T विकर्ण के लिए

$$C_k(T) = d_k : k,\ t_1^{k_1},\ t_2^{k_2}, \ldots t_p^{k_p} \tag{5.5}$$

तथा

$$C_k(ST) = d_{k,k}\, t_1^{k_1},\ t_2^{k_2}, \ldots, t_p^{k_p} |S_1|^{k_1 - k_2}, \ldots, |S_p|^{k_p} \tag{5.6}$$

समीकरण (14) में $R = I$ से शुरू करने पर

$$f(T) = \int_{s>0} etr(-S) |S|^{t - \frac{(p+1)}{2}} L_\beta^{(\alpha)}(ST)\, dS$$

$$= \frac{\Pi^p(\alpha+\beta)}{\Pi_p(\alpha)} \sum_{k=0} \sum_k \frac{(-\beta)_k}{\left(\alpha + \frac{p+1}{2}\right)_k k!}$$

$$\times \int_{O(p)} \int_{S>0} etr(-S) |S|^{t - \frac{(p+1)}{2}} C_k(SHTH')\, dS\, dH$$

$$f(T) = \eta \int_{O(p)} \int_{S>0} etr(-S) |S|^{t - \frac{(p+1)}{2}} C_k(SHTH')\, dS\, dH$$

यहाँ

$$\eta = \frac{\Pi_p(\alpha+\beta)}{\Pi_p(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_k \frac{(-\beta)_k}{\left(\alpha + \frac{p+1}{2}\right)_k k!} \tag{5.6}$$

$$f(T) = \eta \int_{s>0} etr(-S)|S|^{t-\frac{(p+1)}{2}} \left\{ \frac{C_k(S)\, C_k(T)}{C_k(I)} \right\}$$

परिणाम (5.5) के बल पर अथवा

$$f(T) = \eta \frac{f(I)\, C_k(T)}{C_k(I)} \tag{5.8}$$

यह मानते हुए कि T विकर्ण है, हम $t_1^{k_1}, t_2^{k_2}, \ldots, t_p^{k_p}$, वाले पद की तुलना कर सकते हैं और इससे

$$\frac{f(I)}{C_k(I)} + \int_{s>0} etr(-S)|S|^{t-\frac{(p+1)}{2}} |S_1|^{k_1-k_2}, , \ldots, |S_p|^{k^p} dS \tag{5.9}$$

प्राप्त करते हैं। S को $U'U$ में रूपान्तरित करने पर, जहाँ U ऊपरी त्रिभुजीय मैट्रिक्स है, हमें प्राप्त होते हैं -

$$J = 2^p \prod_{j=1}^{p} u_{jj}$$

तथा

$$|S_i| = \prod_{j=1}^{1} u_{jj}^2$$

समीकरण (5.8) का दाहिना पक्ष निम्नांकित में परिवर्तित हो जाता है

$$\prod_{i=1}^{p} \prod_{j<i} \int \exp(-u_{ij}^2)\, du_{ij} \prod_{j=1}^{p} \int (u_{jj}^2)^{V_j-1} \exp(-u_{jj}^2)\, du_{jj}^2$$

$$= \pi^{p\frac{(p-1)}{4}} \prod_{j=1}^{p} \Gamma(V_j)$$

जहाँ

$$V_i = t + k_j - (j-1)/2$$

इससे (4.1) में $R = I$ के लिए परिणाम प्राप्त होता है

$$f(T) = \eta\, \Gamma_p(t, K)\; C_k(T) \tag{5.10}$$

यदि $R \neq I$, तो हम (5.1)को $R = I$ में सदैव समानीत कर सकते हैं यदि हम समीकरण (5.1) में

$$S^* = R^{1/2}\, SR^{1/2}$$

लिखें । पुनः स्मरण करते हुए कि जैकोबियन $|R|^{-(p+1)}$ है और यह कि

$$C_k(R^{-1/2} S^* R^{-1/2} T) = C_k(S^* T^*)$$

जहाँ

$$T^* = R^{-1/2}\, TR^{-1/2}$$

तो हमें परिणाम

$$f(T) = \eta \int_{s^*>0} etr(-S^*)\,|S^*|^{t-\frac{(p+1)}{2}}\; C_k(S^*T^*)\; dS^*$$

$$f(T) = \eta \frac{f(I)\, C_k(T^*)}{C_k(I)} \tag{5.11}$$

प्राप्त होता है जो (5.1) को सिद्ध करता है यदि हम स्मरण करें कि

$$C_k(T^*) = C_k(R^{-1/2}\, TR^{-1/2})$$

$$= C_k(R^{-1} T)$$

अब समीकरण (5.1) की उपपत्ति निम्नवत् दी जाती है -

$$\int_{s>0} etr(-RS)\,|S|^{t-\frac{p+1}{2}}\; L_\beta^{(\alpha)}(ST)\, dS$$

$$= \eta\, \Gamma_p(t, K)\, |R|^{-t}\, C_k(R^{-1} T)$$

$$= \frac{(\Pi_p(\alpha+\beta)}{\Pi_p(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{(-\beta)_k}{\left(\alpha + \frac{p+1}{2}\right)_k k!} C_k(R^{-1}T)\, \Gamma_p(t, K) |R|^{-1}$$

समीकरण (5.7) से η का मान रखने पर उपर्युक्त समीकरण का रूप होगा

$$= \Gamma_p(t, K) |R|^{-t} \frac{\Pi_p(\alpha+\beta)}{\Pi_p(\alpha)} {}_1F_1\left(-\beta; \alpha + \frac{p+1}{2}; R^{-1}T\right)$$

अतः उपपत्ति पूरी हुई।

प्रमेय 2. एक जटिल संमित मैट्रिक्स Z के लिए $\operatorname{Re} Z > 0$ तथा T एक यादृच्छिक जटिल संमित मैट्रिक्स तथा $(\operatorname{Re}(t) > \frac{p-1}{2}$, तो

$$\int_{s>0} etr(-ZS) |S|^{t-\frac{(p+1)}{2}} L_\beta^{(\alpha)}(S^{-1}T)\, dS$$

$$= \Gamma_p(t, -K) |Z|^{-1} \frac{\Pi^p(a+\beta)}{\Pi_p(\alpha)} {}_1F_1\left(-\beta; \alpha + \frac{p+1}{2}; ZT\right) \qquad (5.12)$$

उपपत्ति - इसकी उपपत्ति प्रमेय 1 की भाँति है सिवाय इसके कि हमें एक तत्समक प्राप्त है,

$$C_k(S^{-1}T) = d_{k,k}\, t_1^{k_1}, t_2^{k_2}, \ldots, t_p^{k_p} |S_1|^{-k_1-k_2}, \ldots, |S_p|^{-k_p}$$

शेष उपपत्ति स्पष्ट है।

प्रमेय 3. यदि R एक यादृच्छिक संमित जटिल $p \times p$ मैट्रिक्स हो तो

$$\int_{s>0} |S|^{t-\frac{(p+1)}{2}} |I+S|^{-(t+u)} L_\beta^{(\alpha)}(RS)\, dS$$

$$= \frac{\Gamma_p(t, K)\, \Gamma_p(u, -K)}{\Gamma_p(t+u)} \frac{\Pi_p(\alpha+\beta)}{\Pi_p(\alpha)} {}_1F_1\left(-\beta; \alpha + \frac{p+1}{2}; R\right) \qquad (5.13)$$

क्योंकि

$$\text{Re}(t) > \frac{p-1}{2}, \text{Re}(u) > \frac{p-1}{2} + k_1, R = R' > 0, S = S' > 0, \| R \| <, 1\,1, \| S \| < 1$$

तथा

प्रमेय 4.

$$\text{Re}(t) > \frac{p-1}{2}, \text{Re}(u) > \frac{p-1}{2} + k_1, R = R' > 0, S = S' > 0, \| R \| <, 1, \| S \| < 1$$

तथा R एक यादृच्छिक संमित जटिल $p \times p$ मैट्रिक्स हो तो

$$\int_{s>0} |S|^{t-\frac{p+1}{2}} |I + S|^{-(t+u)} L_{\beta}^{(\alpha)}(RS^{-1})\, dS$$

$$= \frac{\Gamma_p(t,-K)\,\Gamma_p(u, K)}{\Gamma_p(t+u)} \frac{\Pi_p(\alpha+\beta)}{\Pi_p(\alpha)}\, {}_1F_1\left(-\beta\,;\alpha + \frac{p+1}{2};\ R\right) \qquad (5.14)$$

उपपत्ति : प्रमेय 3 तथा प्रमेय 4 दोनों ही को समीकरण (5.1) पर विचार करने तथा दोनों ओर $\text{etr}(Z)|Z|(p+)/2$ से गुणा करने तथा $Z > 0$ समाकलन करने तथा मानने पर सिद्ध किया जाता है।

इस तरह

$$\int_{s>0} \Gamma_p\,(t+u)\,|S|^{t\quad (p+1)/2}\,|I+S|^{\quad (t+u)} L_{\beta}^{(\alpha)}(RS)\; dS$$

$$= \Gamma_p(t,\ K) \int_{z>0} etr(-Z)\,|Z|^{u\quad \frac{(p+1)}{2}} \frac{\Pi_p(\alpha+\beta)}{\Pi_p(\alpha)}\, {}_1F_1\left(-\beta; \alpha + \frac{p+1}{2}; RZ^{\quad 1}\right) dZ$$

जो समीकरण (5.12) का प्रयोग करने पर समीकरण (5.13) का परिणाम प्रदान करता है।

(5.14) को सिद्ध करने के लिए हम समीकरण (5.13) में S से $S^{\,1}$ रूपान्तर का प्रयोग करते हैं।

प्रमेय 5. $Re\,(t) > \frac{p-1}{2}$ तथा किसी संमित जटिल मैट्रिक्स T के लिए

$$\int_{s>0} etr\,(-S)\,|S|^{t-\frac{(p+1)}{2}}\,(tr\,S)^j\,L_\beta^{(\alpha)}\,(ST)\,dS$$

$$= \frac{\Gamma_p\,(t,\;K)\,\Gamma(tp+j+K)}{\Gamma_p\,(tp\;+\;k)}\;\frac{\Pi_p\,(\alpha+\beta)}{\Pi_p\,(\alpha)}\;{}_1F_1\left(-\beta\,;\,\alpha+1\,\frac{p+1}{2}\,;\;T\right) \quad (5.15)$$

तथा

प्रमेय 6. किसी संमित जटिल मैट्रिक्स T तथा $Re\,(t) > \frac{p-1}{2} + k$ के लिए, तो हमें (5.16) प्राप्त होता है -

$$\int_{s>0} etr\,(-S)\,|S|^{t-\frac{(p+1)}{2}}\,(tr\,S)^j\,L_\beta^{(\alpha)}\,(S^{-1}T)\;dS$$

$$= \frac{\Gamma_p\,(t,-K)\,\Gamma(tp+j-k)}{\Gamma_p\,(tp\;-\;k)}\;\frac{\Pi_p\,(\alpha+\beta)}{\Pi_p\,(\alpha)}\;{}_1F_1\left(-\beta\,;\alpha+1\;\;\frac{p+1}{2}\,;\;T\right) \quad (5.16)$$

उपपत्ति : प्रमेय 5 तथा प्रमेय 6 दोनों ही सिद्ध हो जाती हैं यदि हम तत्समक

$$\int_{s>0} etr\;\{-S\,(1\;-\;x)\,\}\,|S|^{t-\frac{(p+1)}{2}}\;L_\beta^{(\alpha)}\,(ST)\;dS$$

$$= (\,1-X\,)^{-(pt+k)}\;\Gamma_p\;(\,t,K\,)\;\frac{\Pi_p\;(\,\alpha+\beta\,)}{\Pi_p\;(\,\alpha\,)}\;{}_1F_1\left(-\;\beta\,;\;\alpha\;+1\,\frac{P+1}{2}\,;\;T\right) \quad (5.17)$$

पर विचार करें $\frac{x^f}{J}$ के गुणांक का समीकरण करने पर हमें समीकरण (5.16) का परिणाम प्राप्त होता है।

$$\int_{S>0} etr\,|-S\,(1-x)\,|\;|S|^{t-\frac{(p-1)}{2}}\;L_\beta^{(\alpha)}\left(S^{-1}\,T\right)dS$$

$$= (\,1-X\,)^{-}pt+k\;\Gamma_p\;(\,t,-\;K\,)\;\frac{\Pi_p\;(\,\alpha+\beta\,)}{\Pi_p\;(\,\alpha\,)}\;{}_1F_1\left(-\;\beta\,;\;\alpha+\frac{P+1}{2}\,;\;T\right)$$

(5.18)

से शुरू करने पर, के गुणांक का समीकरण करने पर हमें समीकरण (5.16) का परिणाम मिलता है।

हम देख चुके हैं कि समीकरण (5.13) तथा (5.14) बीटा टाइप-II समाकल हैं।

निर्देश

1. कांस्टैन्टीन, ए. जी. : Ann. Math. Statist. 1963, 34, 1270 - 1285.
2. जेम्स, ए. टी. : Ann. Math. Statist. 1960, 31, 151-158.
3. जेम्स, ए. टी. : Ann. Math. Statist. 1964, 35, 475-501.
4. जेम्स, ए. टी. : J. Multivariate Anal, I, (Proc. 1st Internal; Symp. Krishnaiah, ed.) 1966, 209-235.
5. मथाई, ए. एम. : Math. Nachr. 180, 84, 171-177.
6. मथाई, ए. एम. तथा सक्सेना, आर. के. : Rajasthan Ganita Parishad 1987, 1, 41-48.
7. म्योर हेड, आर. जे. : J. Multivariate Anal., 1975, 5, 283-293.
8. सुब्रमन्यन, कोचरलकोटा : Utilitas Math, 1973, 3, 83-106.
9. पूनम तथा सेठी, पी. एल. : Indian J. Pure Appl. Math., 1992 c, 23(1), 49-53.
10. सुब्रमन्यन कोचरलकोटा : Sankhya : The Indian Journal of Statistics, 1976, 38, Series A, Pt. 3. 221-258.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 2, April, 1999.

आव्यूह कोणांक के लागेर तथा जैकोबी बहुपद बारा अनुमोदित द्विलाम्बिक बहुपद

पी. एल. सेठी तथा श्रीमती भावना शर्मा

गणित तथा सं ख्यिकी विभाग, जयनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जो धपु र

[प्राप्त - 15 नवम्बर 1993]

सारांश

इस प्रपत्र में कांस्टैन्टाइन,[1] जेम्स[3] तथा सुब्रमन्यन[8] द्वारा दिये गये परिणामों की सहायता से आव्यूह कोणांक के लागेर तथा जैकोबी बहुपद द्वारा अनुमोदित द्विलाम्बिक बहुपद से सम्बन्धित कतिपय समाकलों का मान ज्ञात किया गया है।

Abstract

Biorthogonal polynomial suggested by Laguerre and Jacobi polynomial of matrix argument. *By* P. L. Sethi and (Mrs.) Bhawana Sharma, Department of Mathematics and Statistecs, J. N. V. University, Jodhpur.

In this paper some integrals associated with biorthogonal polynomial suggested by Jacobi and Laguerre polynomials of matrix argument have been evaluated with the help of the results given by Constantine[1], James[3] and Subrahmanian[8]. The integral formulae, poised here are given in the form of theorms. A number of integrals have been deduced from these theorems. These integral formulae are applicable to various problems in multivariate distribution theory. It is also found useful in solving problems based on integral equations.

The present study is in a way an extension to the line of approach initiated by Constantine[7], Mathai[6], Subrahmanian[8] and Sethi-Mishra[11].

1. प्रस्तावना

समय-समय पर अनेक कार्यकर्ताओं ने विशिष्ट फलनों के आव्यूह सिद्धान्त की व्याख्या की है—यथा कान्स्टैन्टाइन[1], जेम्स[3], मथाई तथा सक्सेना[7], सेठी तथा पूनम[12]।

मथाई ने[4-6] कुछ विशिष्ट फलनों के आव्यूह सिद्धान्त के विषय में समीक्षा लेख लिखे हैं। हाल ही में सक्सेना, सेठी तथा गुप्ता[9] और सेठी तथा व्यास[10] मे ऐपेल फलनों F_1, F_2, F_3, F_4 वाले आव्यूह सिद्धान्त की विवेचना की है। हमने ज्ञात तथा रोचक नये परिणामों की व्याख्या विशिष्ट दशाओं के रूप में की है।

2. संकेतन

समस्त आव्यूहों को $m \times m$ सममित धनात्मक निश्चित माना गया है। जब तक उल्लेख न हो $S, T, R > 0$ से $S, T,$ तथा R धनात्मक निश्चित होंगे R (.) का अर्थ है। (.) का असली अंश (.) $\int_0^1$ (.) ds का अर्थ है कि (.) $m \times m$ सममित आव्यूह भर में समाकलित है इस तरह कि $S > 0$ तथा $I - S > 0$ कि आइगेन मानों में 0 तथा 1 है। संकेत ‖ (.)‖ (.) के मानको के लिए हैं चूँकि यहाँ पर आव्यूह संमित धनात्मक निश्चित है अतः आइगेनमानों को मानक (norms) के रूप में लिया जा सकता है। (.)। के निर्धारण के लिए tr (.) (.) के लेशमान के लिए जो (.) के प्रमुख विकर्ण तत्वों का योग है।

3. क्षेत्रीय बहुपद

आव्यूह S तथा विविध प्रकार के बहुपद का कतिपय संमित विवरण तथा सिद्धान्त का विकास मथाई तथा प्रोवोस्ट[15] में प्राप्त है। किसी $m \times m$ वास्तविक संमित धनात्मक निश्चित आव्यूह X पर विचार करें। माना कि Vk k डिग्री वाले समांग बहुपद के सदिश समस्ति है जो $m \times m$ संमित आव्यूह X के $m(m+1)/2$ विभिन्न तत्वों में है । अब व्यु क्रमणीय ćk^Zkoc L के द्वार $X \to L \times L'$ समतुल्य रूपान्तर पर विचार करें। उपसमस्ति $V_s \subset V_k$ निश्चर कहलाता है यदि T समस्त व्युत्क्रमणीय आव्यूहों के लिए यदि V_s का कोई निश्चित निश्चर उपसमस्ति नहीं होता $L V_s \subset V_s$ तो यह अखंडनीय निश्चर उपसमस्ति कहलाता है। यह दिखलाया जा सकता है कि V_k कुछ अखंडनीय मिश्चर उपसमस्ति V_k में टूट सकता है जो प्रत्येक खंड $K = (k_1, k_2, \ldots\ldots, k_m), k_1 + k_2 + \ldots + k_m = k$ के संगत है किन्तु m से अधिक खंड न हो। प्रत्येक उपसमस्ति का रैखिक रूपान्तरों के लाम्बिक समूह के अन्तर्गत एक अद्वितीय विमीय उपसमस्ति होता है। ये उपसमस्ति क्षेत्रीय बहुपद $U_k(X)$ द्वारा उत्पन्न किये जाते हैं जिन्हें एक विशेष रीति से सामान्य बनाने पर क्षेत्रीय बहुपद $C K$ (x) प्राप्त होता है। इन बहुपदों के स्पष्ट रूप के k लघुमानों के लिए उपलब्ध हैं। K के दीर्घ मान के लिए हल बहुपदियों की संगणना कर पाना दुष्कर है। आव्यूह कोणांक (matrix argument) के सरल विशेष फलनों को इन करने के लिए हमें इन क्षेत्रीय बहुपदों के कतिपय गुणों की आवश्यकता पड़ती है। परिभाषा से यह निष्कर्ष निकलता है कि जब $X = |x|$ आव्यूह होता है अर्थात् यह एक सदिश राशि

X होता है तो

$$C_k(X) = x^k \tag{3.1}$$

अतः हम $C_k(X)$ को x^k का सार्वीकरण मान सकते हैं। चरघातांकी फलन का निम्नवत् प्रसरण है–

$$e^{tr(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [\mathrm{tr}(X)]^k \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{C_k(X)}{k!} \tag{3.2}$$

$I - X > 0$ यानि $X = X' > 0$ के लिए निम्नवत् है

$$|I - X|^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{(\alpha)_k}{k!} C_k(X) \tag{3.3}$$

तथा X के आगे के मान 0 तथा 1 के मध्य हैं। जहाँ

$$(\alpha)_k = \prod_{j=1}^{m} \left(\alpha - \frac{(j-1)}{2} \right)_{kj} \tag{3.4}$$

जिसमें $K = \left(k_1, \ldots, k_m\right)$, $k_1 + \ldots + k_m = k$

$$\int C_k(H' \times HT)\, dH = C_k(X)\, C_k(T)/C_k(I) \tag{3.5}$$

जहाँ I तत्समक आव्यूह है, समाकलन $m \times n$ आव्यूहों के लाम्बिक समूह का है और αH निश्चर हार की माप है।

4. जिन परिणामों की आवश्यकता पड़ेगी

सुब्रामन्यन[8] के निम्नांकित परिणाम–

$$\text{(I)} \int_{s>0} etr(-RS)\, |S|^{t-\frac{(m+1)}{2}}\, C_k(ST)\, dS$$

$$= \Gamma_m(t, K)\, |R|^{-t}\, C_k(R^{-t}\, T) \tag{4.1}$$

जहाँ $C_K(S)$ श्रेणी बहुपद है जो पूर्णांक k के खंडों $K = (k_1), \ldots, (k_m)$; $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq 0$ के समतुल्य है तथा t संकुल संख्या है जिससे $R(t) > \frac{m-1}{2}$ की तुष्टि होती है तथा

$$\Gamma_m(t, K) = \pi^{m\frac{(m+1)}{4}} \prod_{j=1}^{m} \Gamma\left(t + kj - \frac{(j-1)}{2} \right) \quad (4.2)$$

$m \times m$ धनात्मक निश्चित संमित आव्यूहों की समस्ति के लिए समाकलन है।

संकुल संमित आव्यूह Z तथा याद्दच्छिक संकुल संमित आव्यूह T के लिए

(II)
$$\int_{s>0} etr(-ZS) |S|^{t-\frac{(m+1)}{2}} C_k(ST^{-1})\, dS$$

$$= \Gamma_m(t, K) |Z|^{-t} C_k(ZT) \quad (4.3)$$

जहाँ $R(t) > \frac{m-1}{2} + k_1,\ Z = Z' > 0;\ T = T' > 0;\ R(Z) > 0$

(III)
$$\int_{s>0} |S|^{t-\frac{(m-1)}{2}} |I + S|^{-(t+u)} C_k(RS)\, dS$$

$$= \frac{\Gamma_m(t, k)\, \Gamma_m(u, -K)}{\Gamma_m(t+u)} C_k(R) \quad (4.4)$$

जहाँ

$$R(t) > \frac{m-1}{2},\ R(u) > \frac{m-1}{2} + k_1 \text{ तथा } R = R' > 0,\ R(R) > 0$$

(IV)
$$\int_{s>0} |S|^{t-\frac{(m-1)}{2}} |I + S|^{-(t+u)} C_k(RS^{-1})\, dS$$

$$= \frac{\Gamma_m(t, -k)\, \Gamma_m(u, K)}{\Gamma_m(t+u)} C_k(R) \quad (4.5)$$

A type $-I$ बीटा समाकल को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है–

(V)
$$\int_{s=0} |S|^{t-\frac{(m+1)}{2}} |I - S|^{u-\frac{(m+1)}{2}} C_k(RS)\, dS$$

$$= \frac{\Gamma_m(t, K)\, \Gamma_m(u)}{\Gamma_m(t+u, K)} C_k(R) \quad (4.6)$$

तथा

$$\text{(VI)} \qquad \int_{s>0} |S|^{t-\frac{(m-1)}{2}} |I-S|^{u-\frac{(m+1)}{2}} C_k(RS^{-1})\, dS$$

$$= \frac{\Gamma_m(t, -k)\,\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(t+u, -K)} C_k(R) \qquad (4.7)$$

क्योंकि

$$R(t) > \frac{m-1}{2} k_1;\ R(u) > \frac{m-1}{2};\ R(t+u) > \frac{m-1}{2} + k_1, \quad k' > 0,$$

आगे आने वाले में।

$$\frac{\Gamma_m(t, -K)}{\Gamma_m(t)} = \frac{(-1)^k}{\left(\frac{m+1}{2} - t\right)_k} \qquad (4.8)$$

परिणाम (4.8) आव्यूह चर दशा के लिए रेनविले के परिणाम[14] का प्रत्यक्ष सर्वीकरण है।

5. मुख्य परिणाम

प्रमेय 1

यदि R तथा T यादृच्छिक संकुल संमित आव्यूह हों तो हमें सिद्ध करना है कि

$$\int_{s>0} etr(-RS)|S|^{t-\frac{(m+1)}{2}} Z_n^{\alpha}(ST: l)\, dS$$

$$= \Gamma_m(t, K)|R|^{-t} \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)}\ {}_1F_l\ [+\ +] \qquad (5.1)$$

जहाँ

$$R(t) > \frac{m-1}{2},\ R = R' > 0,\ T = T' > 0,\ \|R\| < 1,\ \|T\| < 1$$

यहाँ पर आव्यूह कोणांक के लागेर बहुपद से प्रस्तावित द्विलांबिक बहुपद निम्नवत् है

$$Z_n^{\alpha}(ST: l) = \frac{\Pi_m(\alpha + \ln)}{\Pi_m(\alpha)}\ {}_1F_l\ [+] \qquad (5.2)$$

यहाँ

$$ {}_1F_l\,[+] = {}_1F_l\left[= n\,;\ \frac{\alpha + \frac{m+1}{2}}{l}, \ldots, \frac{1}{l}(ST,\ l) \right] $$

अपरंच

$$ {}_1F_l\,[+] = \sum_{k=0}^{n} \sum_{K} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{C_k(X)}{\Gamma_m(lk + \alpha + l)} \tag{5.3} $$

यहाँ $K = lk$

तथा $$ \Pi_m = \Gamma_m\left(\alpha + \frac{m+1}{2}\right) $$

उपपत्ति : इस समाकल तत्समक को (5.4) पर विचार करने से सिद्ध किया जाता है कि

$$ C_k(S) = d_{k,k}, \ |S|^{k_1 - k_2}, \ldots, |S_m|^{K_m} \tag{5.4} $$

जहाँ $S_r = \left(S_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, r\right)$

T विकर्ण के लिए भी

$$ C_k(T) = d_{k,k},\ t_1^{k_1},\ t_2^{k_2}, \ldots, t_m^{k_m} \tag{5.5} $$

तथा

$$ C_k(ST) = d_{k,k},\ t_1^{k_1},\ t_2^{k_2}, \ldots, t_m^{k_m}\ |S_1|^{k_1 - k_2}, \ldots, |S_m|^{k_m} \tag{5.6} $$

समीकरण (5.1) में $R = I$ से प्रारम्भ करने पर हमें

$$ f(T) = \int_{s>0} etr(-S)\,|S|^{l - \frac{m+1}{2}}\ Z_n^{\alpha}(ST;\ l)\,dS $$

$$ = \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{K} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{\Gamma_m(lk + \alpha + 1)} \times $$

$$ \int_{O(m)} \int_{S>0} etr(-S)\,|S|^{l - \frac{m+1}{2}}\ C_k(SHTH')\,dSdH $$

$$f(T) = \eta \int_{O(m)} \int_{S>0} etr(-S) |S|^{t-\frac{m+1}{2}} C_k(SHTH')\, dSdH$$

यहाँ

$$\eta = \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{K} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{\Gamma_m(lk + \alpha + 1)} \quad (5.7)$$

$$f(T) = \eta \int_{S>0} etr(-S) |S|^{t-\frac{m+1}{2}} \left\{ \frac{C_k(S)\, C_k(T)}{C_k(I)} \right\} dS$$

परिणाम (3.5) के बल पर।

अथवा $$f(T) = \eta \frac{f(I)\, C_k(T)}{C_k(I)}$$ मिलता है। (5.8)

यह मानते हुए कि T विकर्ण है इस $t_1^{k_1}, t_2^{k_2}, \ldots, t_m^{k_m}$, वाले पद की तुलना कर सकते हैं और हमें

$$\frac{f(I)}{C_k(I)} = \eta \int_{s>0} etr(-S) |S|^{t-\frac{(m+1)}{2}} |S_1|^{k_1-k_2}, \ldots, |S_m|^{k_m} dS \quad (5.9)$$

प्राप्त होता है। S को $U'U$, U में रूपान्तरित करने पर क्योंकि यह ऊपरी त्रिभुजीय आव्यूह है हमें निम्न की प्राप्ति होती है

$$J = 2^m \prod_{j=1}^{m} u_{jj}$$

तथा $$|S_i| = \prod_{j=1}^{i} u_{jj}^2$$

समीकरण (5.8) का दक्षिण पक्ष

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j<i} \int \exp\left(-u_{jj}^2\right) du_{jj} \prod_{j=1}^{m} \int \left(u_{jj}^2\right)^{V_j-1} \exp\left(-u_{jj}^2\right) du_{jj}^2$$

$$= \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{j=1}^{m} \Gamma(V_j)$$ में परिवर्तित होता है।

जहाँ $V_j = t + k_j - (j - 1)/2$

इससे (5.1) में $R = I$ के लिए परिणाम प्राप्त होता है

$$f(T) = \eta \ \Gamma_m(t, K) \ C_k(T) \tag{5.10}$$

यदि $R \neq I$, तो हम (5.1) को $R = I$ के रूप में समानीत कर सकते हैं ।

समीकरण (5.1) में $S^* = R^{1/2} \ S R^{1/2}$ लिखते हुए तथा यह स्मरण करते हुए कि जैकोबियन $| R |^{-(m+1)}$ है तथा

$$C_k\left(R^{-1/2} S^* R^{-1/2} \ T\right) = C_k(S^* T^*)$$

जहाँ $T^* = R^{-1/2} T R^{-1/2}$ तो हमें (5.11) की प्राप्ति होती है

$$f(T) = \eta \int\limits_{S^*>0} etr(-S^*) \ |S^*|^{t-\frac{m+1}{2}} \ C_k(S^* T^*) \ dS^*$$

$$f(T) = \eta \frac{f(I) \ C_k(T^*)}{C_k(I)} \tag{5.11}$$

जिससे (5.1) सिद्ध हो जाता है यदि हम स्मरण करें कि

$$C_K(T^*) = C_K\left(R^{-1/2} T R^{-1/2}\right)$$

$$= C_k((R^{-1} T)$$

अब समीकरण (5.1) की उपपत्ति निम्न प्रकार से दी जाती है

$$\int\limits_{S>0} etr(-RS) \ |S|^{t-\frac{m+1}{2}} \ Z_n^{\alpha}(ST; \ I) \ dS$$

$$= \eta \Gamma_m(t, \ K) \, . \, |R|^{-t} \ C_k(R^{-1} \ T)$$

(5.7) से η का मान रखने पर

$$= \Gamma_m(t, K) . |R|^{-t} \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \, {}_1F_l \, [+ +]$$

यहाँ

$$ {}_1F_l \, [+ +] = {}_1F_l\left[-n ; + \frac{m+1}{2}, \ldots, \frac{1}{l}\left(R^{-1}, l\right)\right]$$

प्रमेय 2

P जो कि एक संकुल संमित आव्यूह $R(P) > 0$ है तथा T जो कि यादृच्छिक संकुल संमित आव्यूह है तथा $R(t) > (m-1)/2$, तो

$$\int_{S>0} etr(-PS) \, |S|^{t - \frac{m+1}{2}} \, Z_n^{\alpha}(S^{-1}T; l) \, dS$$

$$= \Gamma_m(t, -K) . |P|^{-t} \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \, {}_1F_l \, [+ + +] \qquad (5.12)$$

यहाँ

$$ {}_1F_l \, [+ + +] = {}_1F_l\left[-n ; \frac{\alpha + \frac{m+1}{2}}{l}, \ldots, \frac{1}{l}(ZT, l)\right]$$

उपपत्ति : इसकी उपपत्ति प्रमेय 1 जैसी ही है, सिवाय इसके कि हमारे पास तत्समक

$$C_k(S^{-1}T) = d_{k,k}, \, t_1^{k_1}, t_2^{k_2}, \ldots, t_m^{k_m} \, |S_1|^{(-k_1 - k_2)}, \ldots, |S_m|^{-k_m}$$

कि शेष उपपत्ति बिल्कुल स्पष्ट है।

प्रमेय 3

यदि R यादृच्छिक संकुल संमित आव्यूह $m \times m$ हो तो

$$\int_{S>0} |S|^{t - \frac{m+1}{2}} \, |I + S|^{-(t+u)} \; Z_n^{\alpha}(RS; l) \, dS$$

$$= \frac{\Gamma_m(t, K)\,\Gamma_m(u, -K)}{\Gamma_m(t+u)} \, \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \, {}_1F_l \, [*]$$

यहाँ

$$_1F_l\,[\,^*\,] = {}_1F_l\left[-n;\ \frac{\alpha+\frac{m+1}{2}}{l},\ldots,\frac{1}{l}(R,\ l)\right] \quad (5.13)$$

क्योंकि

क्यों कि $R(t) > \frac{m-1}{2}$, $R(u) > \frac{m-1}{2} + k_1$, $R = R' > 0$, $S = S' > 0$,

$\| R \| < 1$, $\| S \| < 1$ तथा

प्रमेय 4

चूँकि $R(t) > \frac{m-1}{2}$, $R(u) > \frac{m-1}{2} + k_1$, $R = R' > 0$, $S = S' > 0$,

$\| R \| < 1$, $\| S \| < 1$ तथा R एक यादृच्छिक संमित संकुल $m \times m$ आव्यूह है तब

$$\int_{S>0} |S|^{t-\frac{m+1}{2}} |I+S|^{(t+u)}\ Z_n^{\alpha}(RS;\ I)\ dS$$

$$= \frac{\Gamma_m(t,\ -K)\,\Gamma_m(u,\ K)}{\Gamma_m(t+u)}\ \frac{\Pi_m(\alpha+ln)}{\Pi_m(\alpha)}\ {}_1F_l\,[\,^*\,] \quad (5.14)$$

यहाँ $_1F_l\,[\,^*\,] = {}_1F_l\left[-n;\ \frac{\alpha+\frac{m+1}{2}}{l},\ldots,\frac{1}{l}(R,\ I)\right]$

उपपत्ति : प्रमेय (3) तथा (4) दोनों ही समीकरण (5.1) पर विचार करने तथा दोनों ओर etr $(-P)\,|P|^{t-(m+1)/2}$ से गुणा करने तथा समाकलन करने और $P>0$ होने से सिद्ध हो जाती है। इस प्रकार

$$\int_{S>0} \Gamma_m(t \times u)\,|S|^{t-\frac{m+1}{2}}\,|I+S|^{-(t+u)}\ Z_n^{\alpha}(RS;\ I)\,dS$$

$$= \Gamma_m(t,\ K)\int_{P>0} etr(-P)\,|P|^{u-\frac{m+1}{2}}\ \frac{\Pi_m(\alpha+ln)}{\Pi_m(\alpha)}\ {}_1F_l\,[\sigma]\,dP$$

यहाँ

$$ {}_1F_l\,[\,\sigma\,] = {}_1F_l\left[-n;\ \frac{\alpha + \frac{m+1}{2}}{l}, \ldots, \frac{1}{l}(RP^{-1}, l)\right] $$

जो समीकरण (5.2) को व्यवहृत करने पर समीकरण (5.13) के परिणाम को प्रदान करता है। (5.4) को सिद्ध करने के लिए इस समीकरण (5.10) में रूपान्तर S से S^{-1} का प्रयोग करते है।

प्रमेय 5

$R(t) > (m-1)/2$ तथा किसी संमित संकुल आव्यूह के लिए

$$ \int_{S>0} etr(-S)\,|S|^{t-\frac{m+1}{2}}\,(tr\,S)^j\, Z_n^{\alpha}(ST;\ l)\,dS $$

$$ = \frac{\Gamma_m(t,\ K)\,\Gamma(tm+j+k)}{\Gamma(tm+k)}\ \frac{\Pi_m(\alpha+ln)}{\Pi_m(\alpha)}\ {}_1F_l\,[\,\sigma\sigma\,] \qquad (5.15) $$

प्रमेय 6

किसी भी सेमित संकुल आव्यूह T तथा

$R(t) > \frac{m-1}{2} + k_1$, के लिये तब हमें

$$ \int_{S>0} etr(-S)\,|S|^{t-\frac{m+1}{2}}\,tr(S)^j\, Z_n^{\alpha}(S^{-1}T;\ l)\,dS $$

$$ = \frac{\Gamma_m(t,\ -K)\,\Gamma(tm+j-k)}{\Gamma(tm-k)}\ \frac{\Pi_m(\alpha+ln)}{\Pi_m(\alpha)}\ {}_1F_l\,[\,\sigma\sigma\,] \qquad (5.16) $$

प्राप्त होता है।

उपपत्ति : प्रमेय (5) तथा (6) दोनों ही को तत्समक

$$ \int_{S>0} etr\{-S\}(1-x)\}\,|S|^{t-\frac{m+1}{2}}\, Z_n^{\alpha}(ST;\ l)\,ds $$

$$ = (1-X)^{-(mt+k)}\,\Gamma_m(t,\ K)\ \frac{\Pi_m(\alpha+ln)}{\Pi_m(\alpha)}\ {}_1F_l\,[\,\sigma\sigma\,] \qquad (5.17) $$

यहाँ

$$ {}_1F_l\,[\,\sigma\sigma\,] = {}_1F_l\left[-n : \frac{\alpha + \frac{m+1}{2}}{l}, \ldots, \frac{1}{l}(T, l)\right] $$

पर विचार करके सिद्ध किया जा सकता है। $xj/j!$ के गुणाक का समीकरण करने पर हमें (5.16) का परिणाम मिलता है। इसी तरह

$$ \int_{S>0} etr\{-S\}(1-x)\}\,|S|^{t-\frac{m+1}{2}}\, Z_n^{\alpha}(S^{-1}T : l)\, dS $$

$$ = (1-X)^{(-mt+k)}\,\Gamma_m(t, -K)\,\frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)}\,{}_1F_l\,[\,\sigma\sigma\,] \qquad (5.18) $$

से प्रारम्भ करते हुए $\frac{XJ}{J!}$ के गुणांक का समीकरण करने पर समीकरण (5.16) का परिणाम प्राप्त होता है।

यह दृष्टव्य है कि समीकरण (5.13)तथा (5.14) दोनों ही बीटा टाइप –II समाकल हैं।

कान्सैन्टाइन[1] ने इस प्रकार के टाइप -I समाकल का अध्ययन किया है। सर्वप्रथम हम $|S|^{t-\frac{(m+1)}{2}} C_K(S)$ के लाप्लास रूपान्तर को द्विलाम्बिक बहुपद के रूप में व्यक्त करेगें जिसका अनुमोदन आव्यूह कोणांक के लागेर बहुपद से होता है।

$$ \int_{S>0} etr\{(-SZ)\}\,|S|^{t-\frac{(m+1)}{2}}\, Z_n^{\alpha}(S : l)\, dS $$

$$ = \Gamma_m(t, K)\,|Z|^{-t}\,\frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)}\,{}_1F_l\,[\,-\,] \qquad (5.19) $$

यहाँ

$$ {}_1F_l\,[\,-\,] = {}_1F_l\left[-n : \frac{\alpha + \frac{m+1}{2}}{l}, \ldots, \frac{1}{l}(Z^{-1}, l)\right] $$

क्योंकि $R(t) > (m-1)/2$ यह समीकरण (5.1) से निकलता है।

अब लाप्लास रूपान्तर प्रविधि का उपयोग करके हम निम्नांकित प्रमेयों को सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 7

यदि $R =$ याहच्छिक संमित संकुल $m \times m$ आव्यूह हो तथा

$$R(t) > \frac{m-1}{2};\ R(u) > \frac{m-1}{2};\ R(t+u) > \frac{m-1}{2},$$

तो

$$\int_{S>0} |S|^{t-\frac{m+1}{2}} |I-S|^{u-\frac{(m+1)}{2}} Z_n^{\alpha}(RS;\ l)\, dS$$

$$= \frac{\Gamma_m(t,\ K)\,\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(t+u,\ K)} \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)}\ {}_1F_l\ [--] \tag{5.20}$$

उपपत्ति : सिद्ध करने के लिये हम सर्वप्रथम यह देखते हैं कि यह R का संमित फलन F(R) है अतः हम लिख सकते हैं :

$$F(R) = \eta \left\{ \frac{F(I)}{C_k(I)} \right\} C_k(R) \tag{5.21}$$

जहाँ η को समीकरण (5.7) के द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$F(R) = \eta \int_{S>0} |S|^{t-\frac{m+1}{2}} |I-S|^{u-\frac{(m+1)}{2}} C_K(RS)\, dS$$

S को $R^{-1/2}\,T\,R^{-1/2}$ में रूपान्तरित करते हुए तथा समीकरण (5.21) के दोनों ओर के लाप्लास रूपान्तर को ज्ञात करते हुए

$$F(R)\,|R|^{t+u-\frac{m+1}{2}} = \int_0^R |T|^{t-\frac{m+1}{2}} |R-T|^{u-\frac{(m+1)}{2}} C_K(T)\, dT$$

समीकरण (5.21) से हमें निम्नांकित मिलता है

$$\frac{F(I)}{C_k(I)}\, \eta \int_{R>0} etr(-RP)\,|S|^{t+u-\frac{(m+1)}{2}} C_K(R)\, dR$$

$$= \eta \int_{R>0} etr(-RP) \int_0^R |T|^{t-\frac{m+1}{2}} |R-T|^{u-\frac{m+1}{2}} |R|^{u-\frac{(m+1)}{2}} C_K(T)\, dT\, dR$$

अथवा

$$\frac{F(I)}{C_k(I)} \int_{R>0} etr(-RP)\,|R|^{t+u-\frac{(m+1)}{2}}\, C_K(R)\, dR$$

$$= \int_0^R |T|^{t-\frac{m+1}{2}}\, |R-T|^{u-\frac{(m+1)}{2}}\, C_K(T)\, dT \,.\int_{R>0} etr(-RP)\,|R|^{u-\frac{(m+1)}{2}}\, dR$$

अथवा

$$\frac{F(I)}{C_K(I)}\, \Gamma_m(t+u, K)\,|P|^{-(t+u)}\, C_K(P^{-1})$$

$$= \Gamma_m(t, K)\,|P|^{-t}\, C_K(P^{-1})\,\Gamma_m(u)\,|P|^{-u}$$

अथवा

$$\frac{F(I)}{C_K(I)} = \frac{\Gamma_m(t, K)\,\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(T+u, K)}$$

इस प्रकार समीकरण (5.21) से परिणाम प्राप्त हो जाता है।

$$F(R) = \eta\,\frac{\Gamma_m(t, K)\,\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(T+u, K)}\, C_k(R)$$

अथवा

$$F(R) = \frac{\Gamma_m(t, K)\,\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(t+u, K)}\,\frac{\Pi_m(\alpha+ln)}{\Pi_m(\alpha)}\; {}_1F_l[--]$$

यहाँ

$${}_1F_l\,[--] = {}_1F_l\left(-n;\ \frac{\alpha+\frac{m+1}{2}}{l}, \ldots, \frac{1}{l}(R, l)\right)$$

प्रमेय 8

यदि R= यादृच्छिक संमित संकुल $m\times m$ आव्यूह हो तो

$$\int_{S>0} |S|^{t-\frac{m+1}{2}}\, |I-S|^{u-\frac{(m+1)}{2}}\, Z_n^{\alpha}(RS^{-1};\, l)\, dS$$

$$= \frac{\Gamma_m(t, - K)\,\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(t + u, - K)} \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \; {}_1F_l[--] \qquad (5.22)$$

जहाँ

$$R(t) > \frac{m-1}{2} + k_1 \,;\; R(u) > \frac{m-1}{2} \,;\; R(t+u) > \frac{m-1}{2} + k_1 \,,$$

उपपत्ति : इस प्रमेय से सिद्ध करने के लिए एक समीकरण (5.20) में S को S^{-1} में रूपान्तरित करते हैं और तत्समक

$$C_K\left(S^{-1}\; T\right) = d_{k,k'}\, t_1^{k_1},\; t_2^{l_2}, \ldots, t_m^{k_m} \,|\, S_1 \,|^{(-k_1 - k_2)}, \ldots, |\, S_m \,|^{-k_m}$$

का प्रयोग करते हैं। शेष उपपत्ति स्वतः स्पष्ट है।

6. सार्वीकृत बीटा समाकल वाले आव्यूह कोणांक के लागेर बहुपद द्वारा अनुमोदित द्विलाम्बिक बहुपद का सार्वीकरण

परिभाषा

डे वाल[2] ने बीटा समाकल का सार्वीकरण निम्न रूप में दिया है -

$$\int_{\sum L_r = P} \phi\left(L_1, \ldots, L_q\right) \prod_{r=1}^{q} dL_r$$

$$= \left\{ \prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Pi_m(a)} \right\} |\, P \,|^{a - \frac{(m+1)}{2}} \; |\, I - P \,|^{b - \frac{(m+1)}{2}} \qquad (6.1)$$

यहाँ

$$\phi\left(L_1, \ldots, L_q\right) = \prod_{r=1}^{q} |\, L_r \,|^{a_r - \frac{(m+1)}{2}} \left| I - \sum_{r=1}^{q} L_r \right|^{b - \frac{(m+1)}{2}}$$

धनात्मक संमित आव्यूह R के आव्यूह कोणांक के लागेर बहुपद द्वारा अनुमोदित सार्वीकरण द्विलाम्बिक बहुपद इस प्रकार है -

$$L_P Z_n^{\alpha}\left(R \sum_{r=1}^{q} L_r \,;\, l \right) = \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \; {}_1F_l\,[\$]$$

यहाँ

$$ {}_1F_l\,[\,\$\,] = {}_1F_l\left[-n\,;\,\frac{\alpha+\frac{m+1}{2}}{l},\ldots,\frac{1}{l}\left(R\sum_{r=1}^{q}L_r\,;\,l\right)\right] \qquad (6.2)$$

किसी धनात्मक निश्चित संमित आव्यूह R के लिए डे वाल का परिणाम इस प्रकार है -

$$\int\limits_{\substack{0<L_r<1\\0<\sum L_r<1}} \phi\left(L_1,\ldots,L_q\right) C_K\left(R\sum_{r=1}^{q}L_r\right) dL_1,\ldots,dL_q$$

$$= \left\{\frac{\Gamma_m(a)\prod_{r=1}^{q}\Gamma_m(a_r)}{\Gamma_m(a+b)}\right\}\left\{\frac{(a)_K}{(a+b)_K}\right\} C_K(R) \qquad (6.3)$$

क्षेत्रीय बहुपद $C_K\left(R\sum_{r=1}^{q}L_r\right)$ को सार्वीकृत द्विलाम्बिक बहुपद से स्थानान्तरित करो जैसा कि मैट्रिक कोणांक के $Z_n^{\alpha}\left(R\sum_{r=1}^{q}L_r\,;\,l\right)$ बहुपद द्वारा अनुमोदित है, तथा समीकरण (6.3) का बायाँ पक्ष निम्नवत् हो जाता है

$$\int\limits_{\substack{0<L_r<1\\0<\sum L_r<1}} \phi\left(L_1,\ldots,L_q\right) Z_n^{\alpha}\left(R\sum_{r=1}^{q}L_r\,;\,l\right) dL_1,\ldots,dL_q$$

$$=\int\limits_{\substack{0<L_r<1\\0<\sum L_r<1}} \phi\left(L_1,\ldots,L_q\right)\frac{\Pi_m(\alpha+l\,n)}{\Pi_m(\alpha)}\sum_{k\;0}^{n}\sum_{k}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{C_K\left(R\sum_{r=1}^{q}L_r\right)}{\Gamma_m\,(l\,k+\alpha+1)}\,dL_1,\ldots,dL_q$$

(6.2) से $Z_n^{\alpha}\left(R\sum_{r=1}^{q}L_r\,;\,l\right)$ के मान रखने पर निम्न की प्राप्ति होती है

$$=\eta\left\{\frac{\Gamma_m(a)\prod_{r=1}^{q}\Gamma_m(a_r)}{\Gamma_m(a+b)}\right\}\left\{\frac{(a)_K}{(a+b)_K}\right\} C_K(R)$$

जहाँ η की परिभाषा समीकरण (5.7) के द्वारा दी जाती है।

प्रमेय 9

किसी धनात्मक निश्चित संमित आव्यूह R तथा

$R(a) > (m-1)/2,\ R(b) > (m-1)/2,\ R(a+b) > (m-1)/2$, के लिए

$$\int_{0<\sum L_r<1} \phi\left(L_1,\ldots,L_q\right) Z_n^{\alpha}\left(R\sum_{r=1}^{q} L_r : l\right) dL_1,\ldots,dL_q$$

$$= \frac{\Pi_m(\alpha+ln)}{\Pi_m(\alpha)} \prod_{r=1}^{q} \Gamma_m(a_r) \left\{\frac{\Gamma_m(a, K)}{\Gamma_m(a+b, K)}\right\} {}_1F_l(*) \tag{6.4}$$

उपर्युक्त की भाँति परिभाषित होता है।

उपपत्ति : प्रमेय 9 को सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि वाम पक्ष को निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$\int_0^1 f(P)\, Z_n^{\alpha}(RP : l)\, dP$$

यहाँ $f(P)$ (6.4) दक्षिण पक्ष है। इसे समीकरण (5.20) का प्रयोग करके (6.4) के दक्षिण पक्ष के रूप में लिखा जा सकता है और दक्षिण पक्ष की राशि को निम्नवत् लिखा जा सकता है -

$$\int_0^1 f(P)\, Z_n^{\alpha}(RP : l)\, dP = \eta \prod_{r=1}^{q} \Gamma_m(a_r) \left\{\frac{\Gamma_m(a, K)}{\Gamma_m(a+b, K)}\right\} C_k(R)$$

$$= \frac{\Pi_m(\alpha+ln)}{\Pi_m(\alpha)} \prod_{r=1}^{q} \Gamma_m(a_r) \left\{\frac{\Gamma_m(a, K)}{\Gamma_m(a+b, K)}\right\} \sum_{k=0}^{n} \sum_{K} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{C_k(R)}{\Gamma_m(lk+\alpha+1)}$$

$$= \frac{\Pi_m(\alpha+ln)}{\Pi_m(\alpha)} \prod_{r=1}^{q} \Gamma_m(a_r) \left\{\frac{\Gamma_m(a, K)}{\Gamma_m(a+b, K)}\right\} {}_1F_l(*)$$

यहाँ

$$ {}_1F_l\ (*) = {}_1F_l\left(-n ; \frac{\alpha + \frac{m+1}{2}}{l}, \ldots, \frac{1}{l}(R, l) \right) $$

चूँकि

$$ (a)_k = \frac{\Gamma_m(a, K)}{\Gamma_m(a)} $$

अतः परिणाम सिद्ध हुआ ।

प्रमेय 10

किसी धनात्मक निश्चित संमित आव्यूह R तथा

$$ R(a) > (m-1)/2,\ R(b) > (m-1)/2,\ R(a+b) > (m-1)/2 ;, $$

$R(a_r) > m - 1/2\ (r = 1, \ldots, q)$.के लिए

$$ \int\limits_{0<\sum L_r<1} \phi\left(L_1, \ldots, L_q\right) Z_n^{\alpha}\ \{R(\sum L_r)^{-1}\}\ dL_1, \ldots, dL_q $$

$$ = \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \prod_{r=1}^{q} \Gamma_m(a_r) \left\{ \frac{\Gamma_m(a, -K)}{\Gamma_m(a+b, -K)} \right\}\ {}_1F_l(*) \qquad (6.5) $$

उपपत्ति : इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम अनुभाग 5 के अन्तर्गत दिये गये समीकरण (5.20) का अनुसरण करते हैं तथा $\sum L_r$ को $\sum L_r^{-1}$ में रूपान्तरित करते हैं। फिर तत्समक

$$ C^k\left(RS^{-1}\right) = d_{k.k},\ R_1^{k_1}, \ldots, R_m^{k_m} |S|^{-(k_1-k_2)}, \ldots, |S_m|^{-k_m} $$

का उपयोग करते हैं। शेष उपपत्ति पूर्ण तथा स्पष्ट है।

इन समाकलों के संशोधनों के निम्नवत् लिखा जाता है

$$ \int\limits_{0<\sum L_r<1} \phi\left(L_1, \ldots, L_q\right) Z_n^{\alpha}\ \{R(I-P) : l\}\ dL_1, \ldots, dL_q $$

$$= \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \left\{ \prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Pi_m(a)} \right\} |P|^{a - \frac{(m+1)}{2}} |I - P|^{b - \frac{(m+1)}{2}} {}_1F_l(\$\$) \quad (6.6)$$

यहाँ

$${}_1F_l[\$\$] = {}_1F_l\left[-n : \alpha + \frac{(m+1)}{2}, \ldots, \frac{1}{l}\{R(I-P), l\} \right]$$

अथवा

$$\int_{0 < \sum L_r < 1} \phi\left(L_1, \ldots, L_q\right) Z_n^{\alpha}\{R(I-P) ; l\}\, dL_1, \ldots, dL_q$$

$$= \eta \prod_{r=1}^{q} \Gamma_m(a_r) \left\{ \frac{\Gamma_m(a, K)}{\Gamma_m(a+b, K)} \right\} C_k(R) \quad (6.7)$$

जहाँ n को समीकरण (6.7) द्वारा परिभाषित किया जाता है। जिसे समीकरण (6.1) तथा (6.3) में क्रमशः $W = 1 - P$ रखकर सिद्ध किया जाता है । हम इसके आगे का परिणाम लिख सकते हैं -

$$\int_{0 < \sum L_r < 1} \phi\left(L_1, \ldots, L_q\right) Z_n^{\alpha}\{R(I-P)^{-1} ; l\}\, dL_1, \ldots, dL_q$$

$$= \eta \prod_{r=1}^{q} \Gamma_m(a_r) \left\{ \frac{\Gamma_m(a, -K)}{\Gamma_m(a+b, -K)} \right\} C_k(R) \quad (6.8)$$

ट्रोस्की[13] ने R > 0 के लिए उपर्युक्त परिणाम का बीटा टाइप-II समजात (analogue) निम्नवत् दिया है। यहाँ हम आव्यूह कोणांक के द्वारा प्रस्तावित द्विलाम्बिक बहुपद सम्बन्धी इन समाकलों को निम्नवत् स्थापित करते हैं

$$\int_{V>0} |V|^{a - \frac{m+1}{2}} |I + V|^{-(a+b)} Z_n^{\alpha}\{R(I+V)^{-1} ; l\}\, dV$$

$$= \eta \left\{ \frac{\Gamma_m(a)\, \Gamma_m(b)}{\Gamma_m(a+b)} \right\} \left\{ \frac{(b)_K}{(a+b)_K} \right\} C_K(R) \quad (6.9)$$

जो (5.13) से सम्बन्धित है। पुनः

$$P = (I + V)^{-1} V, \; J(V \to P) = |I - P|^{-(m+1)}$$

रखने पर समीकरण (6.9) से हमें

$$\int_{V>0} |V|^{a - \frac{(m+1)}{2}} |I + V|^{-(a+b)} Z_n^{\alpha} \{R(I + V) ; l\} \, dV$$

$$= \eta \int_{0<P<1} |P|^{b - \frac{(m+1)}{2}} |I - P|^{a - \frac{(m+1)}{2}} C_k (RP^{-1}) \, dP$$

प्राप्त होता है जो समीकरण (5.19) के द्वारा

$$\eta \left\{ \frac{\Gamma_m (b, - K) \Gamma_m (a)}{\Gamma_m (a + b, - K)} \right\} C_k (R) \tag{6.10}$$

बन जाता है। यह

$$\int_{\sum V_r = W} \Psi \left(V_1, \ldots, V_q \right) dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \left\{ \prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m (a_r)}{\Pi_m (a)} \right\} |W|^{a - \frac{(m+1)}{2}} |I + W|^{-(a+b)} \tag{6.11}$$

भी बन जाता है।

परिणाम (6.11) से हम तत्समक को भी स्थापित कर सकते हैं क्योंकि क्षेत्रीय बहुपद वाले आव्यूह कोणांक का लागेर बहुपद इस प्रकार है

$$\int_{\sum V_r = W} \Psi \left(V_1, \ldots, V_q \right) Z_n^{\alpha} (R \sum V_r ; dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \eta \left\{ \prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m (a_r)}{\Pi_m (a)} \right\} |W|^{a \cdot \frac{(m+1)}{2}} |I + W|^{\cdot (a+b)} C_K (RW) \tag{6.12}$$

$$\int_{\sum V_r = W} \Psi\left(V_1, \ldots, V_q\right) Z_n^{\alpha}\left[R(R\sum V_r)^{-1} : I\right] dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \eta \left\{\prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Pi_m(a)}\right\} |W|^{a - \frac{(m+1)}{2}} |I + W|^{-(a+b)} C_K(RW^{-1}) \qquad (6.13)$$

$$\int_{\sum V_r = W} \Psi\left(V_1, \ldots, V_q\right) Z_n^{\alpha}\left[R(I + \sum V_r) ; I\right] dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \eta \left\{\prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Pi_m(a)}\right\} |W|^{a - \frac{(m+1)}{2}} |I + W|^{-(a+b)} C_K[R(I + W)] \qquad (6.14)$$

$$\int_{\sum V_r = W} \Psi\left(V_1, \ldots, V_q\right) Z_n^{\alpha}\left[R(I + \sum V_r)^{-1} ; I\right] dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \eta \left\{\prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Pi_m(a)}\right\} |W|^{a - \frac{(m+1)}{2}} |I + W|^{-(a+b)} C_K\left[R(I + W)^{-1}\right] \qquad (6.15)$$

इन प्रत्येक संगमत परिणामों से जो (5.13), (5.14), (6.10) तथा (6.9) को प्रयोग करने से प्राप्त होते हैं

$$\int_{V_r > 0} \Psi\left(V_1, \ldots, V_q\right) Z_n^{\alpha}(R\sum V_r ; I)\, dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \gamma \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \frac{\Gamma_m(a, K)\, \Gamma_m(b, -K)}{\Gamma_m(a + b)} {}_1F_l(*) \qquad (6.16)$$

$$\int_{V_r > 0} \Psi\left(V_1, \ldots, V_q\right) Z_n^{\alpha}\left[R(\sum V_r)^{-1} : I\right] dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \gamma \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \frac{\Gamma_m(a, -K)\Gamma_m(b, K)}{\Gamma_m(a+b)} \, {}_1F_l[*] \tag{6.17}$$

$$\int_{V_r=0} \Psi\left(V_1, \ldots, V_q\right) Z_n^{\alpha}\left[R(I + \sum V_r);\, l\right] dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \gamma \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \frac{\Gamma_m(a)\Gamma_m(b, -K)}{\Gamma_m(a+b, -K)} \, {}_1F_l[*] \tag{6.18}$$

तथा

$$\int_{V_r>0} \Psi\left(V_1, \ldots, V_q\right) Z_n^{\alpha}\left[R(\sum V_r)^{-1};\, l\right] dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \gamma \frac{\Pi_m(\alpha + ln)}{\Pi_m(\alpha)} \frac{\Gamma_m(a)\Gamma_m(b, a\, K)}{\Gamma_m(a+b, K)} \, {}_1F_l[*] \tag{6.19}$$

ऊपर हमने संकेतन

$${}_1F_l(*) = {}_1F_l\left(-n;\, \frac{\alpha + \frac{m+1}{2}}{l}, \ldots, \frac{1}{l}(R, l)\right)$$

तथा

$$\gamma = \prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Gamma_m(a)} \tag{6.20}$$

का प्रयोग किया है।

7. क्षेत्रीय बहुपद वाले धनात्मक संमित निश्चित आव्यूह के जैकोबी बहुपद से अनुमोदित द्विलाम्बिक बहुपद वाला समाकल

प्रमेय 11

यदि R एक संकुल संमित तथा T यादृच्छिक संकुल संमित $m \times m$ आव्यूह हों तो

$$\int_{S>0} etr(-RS)\, |S|^{t - \frac{(m+1)}{2}}\, W_{\gamma}^{(\alpha, \beta)}(I - 2ST;\, l)\, dS$$

$$= \Gamma_m(t,\ K)\,|R|^{\,t}\ \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)}\ {}_{l+1}F_l[\,..\,] \tag{7.1}$$

यहाँ

$${}_{l+1}F_l[\,.\,] = \left[-\gamma, \Delta\left(l, \alpha+\beta+\gamma+\frac{m+1}{2}\right); \Delta\left(l, \alpha+\frac{m+1}{2}\right); \left(R^{-1}T\right)^{\gamma}\right]$$

यहाँ पर आव्यूह कोणांक के जैकोबी बहुपद द्वारा अनुमोदित द्विलाम्बिक बहुपद को निम्नवत् दिया जाता है -

$$W_{\gamma}^{(\alpha,\ \beta)}(ST;\ I) = \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)}\ {}_{l+1}F_l[\,..\,] \tag{7.2}$$

यहाँ

$${}_{l+1}F_l[\,..\,] = {}_{l+1}F_l\left[-\gamma, \Delta\left(l, \alpha+\beta+\gamma+\frac{m+1}{2}\right); \Delta\left(l, \alpha+\frac{m+1}{2}\right); (ST)^l\right] \tag{7.3}$$

तथा

$$\Pi_m(\alpha) = \Gamma_m\left(\alpha + \frac{m+1}{2}\right)$$

उपपत्ति : इस प्रयोग की उपपत्ति प्रमेय 1 की भाँति बिल्कुल स्पष्ट है।

प्रमेय 12

यदि P संकुल संमित $R(P) > 0$ तथा T एक यादृच्छिक संमित आव्यूह हो तो $R(T) > (m-1)/2$, के लिए

$$\int_{S>0} etr(-PS)\,|S|^{t-\frac{(m+1)}{2}}\ W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(I - 2S^{-1}T;\ I)\,dS$$

$$= \Gamma_m(t,\ -K)\,|P|^{-t}\ \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)}\ {}_{l+1}F_l\left(\begin{matrix}\Delta\\ \nabla\end{matrix}\right) \tag{7.4}$$

यहाँ

$${}_{l+1}F_l\left(\begin{matrix}\Delta\\ \nabla\end{matrix}\right) = {}_{l+1}F_l\left[-\gamma, \Delta\left(l, \alpha+\beta+\gamma+\frac{m+1}{2}\right); \Delta\left(l, \alpha+\frac{m+1}{2}\right); (PT)^l\right]$$

उपपत्ति : इसकी उपपत्ति (5.1) के ही समान है। केवल निम्नलिखित तत्समक

$$C_k\left(S^{-1}T\right)=d_{k,k_1},t_1^{k_1},\ldots,t_m^{k_m}|S_1|^{-(k_1-k_2)},\ldots,|S_m|^{-k_m}$$

का प्रयोग किया जाता है और शेष उपपत्ति स्पष्ट है।

प्रमेय 13

यदि $R(t)>(m-1)/2$, के लिए R एक यादृच्छिक संमित संकुल $m\times m$ आव्यूह हो तो

$$\int\limits_{S>0}|S|^{t-\frac{(m+1)}{2}}|I+S|^{-(t+u)}W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(I-2RS;\,I)\,dS$$

$$=\frac{\Gamma_m(t,K)\Gamma_m(u,-K)}{\Gamma_m(t+u)}\frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)}\,{}_{l+1}F_l[\nabla] \tag{7.5}$$

यहाँ

$${}_{l+1}F_l[\nabla]={}_{l+1}F_l\left[-\gamma,\Delta\left(l,\alpha+\beta+\gamma+\frac{m+1}{2}\right);\Delta\left(l,\alpha+\frac{m+1}{2}\right);(R)^l\right]$$

प्रमेय 14

$R(t)>(m-1)/2+k_1$ के लिए R एक यादृच्छिक संमित संकुल $m\times m$ आव्यूह है तो

$$\int\limits_{S>0}|S|^{t-\frac{(m+1)}{2}}|I+S|^{-(t+u)}W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(I-2RS^{-1};\,I)\,dS$$

$$=\frac{\Gamma_m(t,-K)\Gamma_m(u,K)}{\Gamma_m(t+u)}\frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)}\,{}_{l+1}F_l[\nabla] \tag{7.6}$$

यहाँ

$${}_{l+1}F_l[\nabla]={}_{l+1}F_l\left[-\gamma,\Delta\left(l,\alpha+\beta+\gamma+\frac{m+1}{2}\right);\Delta\left(l,\alpha+\frac{m+1}{2}\right);(R)^l\right]$$

उपपत्ति : प्रमेय 13 तथा 14 दोनों ही की उपपत्ति के लिए समीकरण (7.1) पर विचार करने तथा दोनों ओर $(-P)|P|^{t-(m+1)/2}$ से गुणा करके तथा $P>0$ के लिए समाकलित करने पर हमें निम्न की प्राप्ति होती है–

$$\int_{S>0} \Gamma_m(t+u)\,|S|^{t-\frac{(m+1)}{2}}\,|I+S|^{-(t+u)}\,W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(I-2RS^{-1};\,l)\,dS$$

$$=\Gamma_m(t,\,K)\int_{P>0} etr(-P)\,|P|^{-u-\frac{(m+1)}{2}}\,\frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)}\;{}_{l+1}F_l\left[\begin{matrix}\Delta\\ \nabla\end{matrix}\right]dP$$

यहाँ

$${}_{l+1}F_l\left[\begin{matrix}\Delta\\ \nabla\end{matrix}\right]={}_{l+1}F_l\left[-\gamma,\Delta\left(l,\alpha+\beta+\gamma+\frac{m+1}{2}\right);\Delta\left(l,\alpha+\frac{m+1}{2}\right);(RP^{-1})^l\right]$$

जो समीकरण (7.4) के प्रयोग करने पर समीकरण (7.5) के परिणाम को प्रदान करता है।

अब हम समीकरण (7.4) में परिवर्त S के स्थान पर S^{-1} लें तो हमें प्रमेय 14 का परिणाम प्राप्त होते हैं।

प्रमेय 15

किसी संमित संकुल आव्यूह कि लिए $R(t) > (m-1)/2$

$$\int_{S>0} etr(-S)\,|S|^{t-\frac{(m+1)}{2}}\,(tr\,S)^j\,W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(I-2ST;\,l)\,dS$$

$$=\frac{\Gamma_m(t,\,K)\,\Gamma(tm+j+K)}{\Gamma(tm+k)}\,\frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)}\;{}_{l+1}F_l\,(\sim) \qquad (7.7)$$

यहाँ

$${}_{l+1}F_l(\sim)={}_{l+1}F_l\left[-\gamma,\Delta\left(l,\alpha+\beta+\gamma+\frac{m+1}{2}\right);\Delta\left(l,\alpha+\frac{m+1}{2}\right);(T)^l\right]$$

प्रमेय 16

$R(t) > (m-1)/2+k_1$ के लिए कोई संमित संकुलन आव्यूह T

$$\int_{S>0} etr(-S)\,|S|^{t-\frac{(m+1)}{2}}\,(tr\,S)^j\,W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(I-2S^{-1}T;\,l)\,dS$$

$$= \frac{\Gamma_m(t, -K)\,\Gamma(tm+j-k)}{\Gamma(tm-k)} \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)} \; {}_{l+1}F_l\,(\sim) \tag{7.8}$$

उपपत्ति : प्रमेय 15 तथा 16 दोनों प्रमेय तथ तत्समकों पर विचार करने पर

$$\int_{S>0} etr[-S(1-x)]\,|S|^{t-\frac{(m+1)}{2}}\,(tr\,S)^j\,W_\gamma^{(\alpha,\beta)}\,(I-2ST;\,I)\,dS$$

$$=(1-x)^{-(mt+k)}\,\Gamma_m(t,\,K)\,\frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)}\;{}_{l+1}F_l\,(\sim) \tag{7.9}$$

$x^j/j\,!$ के गुणांक का समीकरण करने पर हमें समीकरण (7.7) का परिणाम प्राप्त होता है।

इसी प्रकार

$$\int_{S>0} etr[-S(1-x)]\,|S|^{t-\frac{(m+1)}{2}}\,(tr\,S)^j\,W_\gamma^{(\alpha,\beta)}\,(I-2S^{-1}T;\,I)\,dS$$

$$(1-x)^{-mt+k}\,\Gamma_m(t,\,-K)\,\frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)}\;{}_{l+1}F_l\,(\sim) \tag{7.10}$$

से प्रारम्भ करके, $\frac{x^j}{j!}$ के गुणांक का समीकरण करने पर हमें (7.8) का परिणाम प्राप्त होता है। हमने देखा कि समीकरण (7.5) तथा (7.6) बीटा टाइप –II समाकल हैं। कांन्स्टैन्टाइन[1] ने इस प्रकार के टाइप –I समाकलों का अध्ययन किया है। यहाँ हम आव्यूह कोणांक के जैकोबी बहुपद द्वारा अनुमोदित द्विलाम्बिक बहुपद

$$|S|^{t-\frac{m+1}{2}}\;C_K(S)$$

लाप्लास के रूपान्तर को बताते हैं।

$$\int_{S>0} etr(-PS)\,|S|^{t-\frac{m+1}{2}}\,W_\gamma^{(\alpha,\beta)}\,(I-2S;\,I)\,dS$$

$$=\Gamma_m(t,\,K)\,|P|^{-t}\,\frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)}\;{}_{l+1}F_l\,[=] \tag{7.11}$$

यहाँ

$$_{l+1}F_l[=] = {}_{l+1}F_l\left[-\gamma, \Delta\left(l, \alpha+\beta+\gamma+\frac{m+1}{2}\right); \Delta\left(l, \alpha+\frac{m+1}{2}\right); (P^{-1})^l\right]$$

क्योंकि $R(t) > (m-1)/2$ यह (7.1) से पता चलता है कि लाप्लास रूपान्तर प्रविधि का प्रयोग करके निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 17

यदि R = यादृच्छिक संमित संकुल $m \times m$ आव्यूह हो तो

$$\int_{S>0} |S|^{t-\frac{m+1}{2}} |I-S|^{u-\frac{m+1}{2}} W_\gamma^{(\alpha,\beta)}(I-2RS; l)\, dS$$

$$= \frac{\Gamma_m(t, K)\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(t+u, K)} \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)} {}_{l+1}F_l[\nabla] \quad (7.12)$$

क्योंकि

$R(t) > (m-1)/2$ $R(u) > (m-1)/2$, $R(t+u) > (m-1)/2$

उपपत्ति : इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि यह संमित फलन F (R) तथा R है अतः हम लिख सकते हैं –

$$F(R) = \xi\left\{\frac{F(I)}{C_K(I)}\right\} C_k(R) \quad (7.13)$$

S को $R^{1/2}\,T R^{-1/2}$ में रूपान्तरित करने तथा दोनों पक्षों का लाप्लास रूपान्तर निर्धारित करने पर

$$F(R) = \xi \int_{S>0} |S|^{t-\frac{m+1}{2}} |I-S|^{u-\frac{m+1}{2}} C_K(RS)\, dS$$

यहाँ

$$\xi = \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)} \sum_{k=0}^{\gamma} \sum_K \frac{(-\gamma)_K \Delta\left(l, \alpha+\beta+\gamma+\alpha+\frac{m+1}{2}\right)_k}{k!\,\Delta\left(l, \alpha+\frac{m+1}{2}\right)_k} \quad (7.14)$$

जिसमें $K = l_k$

समीकरण (7.13) से हम

$$\frac{F(I)}{C_K(I)}\xi \int_{R>0} etr(-RP)\,|R|^{(t+u)-\frac{m+1}{2}} C_K(R)\,dS$$

$$= \xi \int_{R>0} etr(-RP) \int_0^R |T|^{t-\frac{m+1}{2}}\,|R-T|^{u-\frac{m+1}{2}}\,|R|^{u-\frac{m+1}{2}}\, C_K(T)\,dT\,dR$$

अथवा

$$\frac{F(I)}{C_K(I)} \int_{R>0} etr(-RZ)\,|R|^{(t+u)-\frac{m+1}{2}} C_K(R)\,dR$$

$$= \int_0^R |T|^{t-\frac{m+1}{2}}\,|R-T|^{u-\frac{m+1}{2}}\, C_K(T)\,dT \int_{R>0} etr(-RP)\,|R|^{u-\frac{m+1}{2}}\,dR$$

अथवा

$$\frac{F(I)}{C_K(I)}\,\Gamma_m(t+u,\,K)\,|P|^{-(t+u)}\,C_K(P^{-1})$$

$$= \Gamma_m(t,\,K)\,|P|^{-t}\,C_K(P^{-1})\,\Gamma_m(u)\,|P|^{-u}$$

$$\frac{F(I)}{C_K(I)} = \frac{\Gamma_m(t,\,K)\,\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(t+u,\,K)}$$

प्राप्त करते हैं। यह परिणाम समीकरण (7.13) से निकलता है

$$F(R) = \xi \frac{\Gamma_m(t,\,K)\,\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(t+u,\,K)}\, C_K(R)$$

समीकरण (7.14) से रखने पर हम पाते हैं -

$$(F)(R) = \xi \frac{\Gamma_m(t,\,K)\,\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(t+u,\,K)}\,\frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)}\;{}_{l+1}F_l[\nabla]$$

अतः समीकरण (7.8) की उपपत्ति पूरी हुई।

प्रमेय 18

यदि R यादृच्छिक संमित संकुल $m \times m$ आव्यूह हो तो

$$\int_{S>0} |S|^{t-\frac{(m+1)}{2}} |I-S|^{u-\frac{m+1}{2}} W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} (I - 2RS^{-1} : I)\, dS$$

$$= \frac{\Gamma_m(t, -K)\,\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(t+u, -K)} \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)} \; {}_{l+1}F_l\,[\,\nabla\,] \qquad (7.15)$$

$R(t) > (m-1)/2 + k_1,\ R(u) > (m-1)/2,\ R(t+u) > (m-1)/2 + k_1$

उपपत्ति : प्रमेय 18 को सिद्ध करने के लिए S को S^{-1} में रूपान्तरित करते हैं और तत्समक

$$C_K(RS^{-1}) = d_{k,k},\ R_1^{k_1},\ R_2^{k_2}, \ldots, R_m^{km},\ |S_1|^{(k_1-k_2)}, \ldots, |S_m|^{km}$$

का प्रयोग करते हैं। शेष उपपत्ति अति स्पष्ट है।

8. सार्वीकृत बीटा समाकरल वाले आव्यूह कोणांक के जैकोबी बहुपद द्वारा अनुमोदित द्विलाम्बिक बहुपद का सार्वीकरण

परिभाषा : डे वाल[2] ने उपर्युक्त का सार्वीकरण दिया है

$$\int \phi\left(L_1, \ldots, L_q\right) dL_r = \left\{\prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Gamma_m(a)}\right\} |P|^{a-\frac{m+1}{2}} |I-P|^{b-\frac{m+1}{2}} \qquad (8.1)$$

जहाँ

$$\phi\left(L_1, \ldots, L_q\right) = \prod_{r=1}^{q} |L_r|^{a_r - \frac{m+1}{2}} \left| I - \sum_{r=1}^{q} L_r \right|^{b-\frac{m+1}{2}}$$

धनात्मक संमित आव्यूह R के सार्वीकृत जैकोबी बहुपद निम्नवत् है

$$W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} \left(I - 2R \sum_{r=1}^{q} L_{r;I} \right) = \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)} \; {}_{l+1}F_l\,[\,*\,] \qquad (8.2)$$

यहाँ

$$_{l+1}F_l[\,*\,] = \left[-\gamma, \Delta\left(l, \alpha+\beta+\gamma+\alpha+\frac{m+1}{2}\right); \Delta\left(l, \alpha+\frac{m+1}{2}\right); \left(R\sum_{r=1}^{q} L_r\right)^{\gamma}\right]$$

जहाँ

$$\Pi_m(\alpha) = \Gamma_m\left(\alpha + \frac{m+1}{2}\right)$$

इसका आव्यूह कोणांक (7.3) द्वारा परिभाषित है।

किसी धनात्मक निश्चित संमित आव्यूह R के लिए डे वाल का परिणाम निम्नवत् है

$$\int\limits_{\substack{0<L_r<1 \\ 0<\sum L_r<1}} \phi\left(L_1,\ldots,L_q\right) C_K\left(R\sum_{r=1}^{q} L_r\right) dL_1,\ldots,dL_q$$

$$= \left\{\frac{\Gamma_m(a)\prod_{r=1}^{q}\Gamma_m(a_r)}{\Gamma_m(a+b)}\right\}\left\{\frac{(a)_k}{(a+b)_k}\right\} \qquad (8.3)$$

क्षेत्रीय बहुपद

$$C_k\left(R\sum_{r=1}^{q} L_r\right)$$ को सार्वीकृत द्विलाम्बिक

बहुपद से प्रतिस्थापित करो, जैसा कि आव्यूह कोणांक के जैकोबी बहुपद द्वारा अनुमोदित है तो (8.1) का वाम पक्ष निम्नवत् हो जाता है

$$\int\limits_{\substack{0<L_r<1 \\ 0<\sum L_r<1}} \phi\left(L_1,\ldots,L_q\right) W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}\left(I - 2R\sum_{r=1}^{q} L_r;\, l\right) dL_1,\ldots,dL_q$$

$$= \int\limits_{\substack{0<L_r<1 \\ 0<\sum L_r<1}} \phi\left(L_1,\ldots,{}_{\gamma}L_q\right) \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)} \sum_{k=0}^{\gamma}\sum_{k}$$

$$\times \frac{(-\gamma)_k\, \Delta\left(l,\, \alpha+\beta+\gamma+\alpha+\frac{m+1}{2}\right)_k}{\Delta\left(l,\, \alpha+\frac{m+1}{2}\right)_k\, k!}$$

$$. C_K\left(R\sum_{r=1}^{q} L_r\right)dL_1,\ldots,dL_q$$

जहाँ K = lk

समीकरण (8.2) से

$W_\gamma^{(\alpha,\beta)}\left(R\sum_{r=1}^{q} L_r : l\right)$ को मान रखने पर

$$= \xi\left\{\prod_{r=1}^{q}\Gamma_m(a_r)\right\}\left\{\frac{\Gamma_m(a, K)}{\Gamma_m(a+b, K)}\right\} C_k(R)$$

जहाँ को समीकरण (7.14) द्वारा परिभाषित किया जाता है।

प्रमेय 19

किसी धनात्मक निश्चित संमित आव्यूह R तथा

$R(a) > (m-1)/2$ $R(b) > (m-1)/2$, $R(a+b) > (m-1)/2$ के लिए हमें

$$\int_{0<\sum L_r<1} \phi\left(L_1,\ldots,L_q\right) W_\gamma^{(\alpha,\beta)}\left(I - 2R\sum_{r=1}^{q} L_r : l\right)dL_1,\ldots,dL_q$$

$$= \frac{\Gamma_m(\alpha+\gamma)}{\Gamma_m(\alpha)}\prod_{r=1}^{q}\Gamma_m(a_r)\left\{\frac{\Gamma_m(a, k)}{\Gamma_m(a+b, K)}\right\}{}_{l+1}F_l[\nabla] \qquad (8.4)$$

उपपत्ति : प्रमेय (19) सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि वाम पक्ष को निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$\int_0^1 f(P)\ W_\gamma^{(\alpha,\beta)}(I - 2RP : l)\ dP$$

जिसमें f (P) को (8.3) के दक्षिण पक्ष द्वारा व्यक्त किया जाता है। इसे समीकरण (7.12)का प्रयोग करते हुए (8.4) के दक्षिण पक्ष के रूप में लिखा जा सकता है और दक्षिण पक्ष की राशि को

$$\int_0^1 f(P)\, W_\gamma^{(\alpha,\beta)}\,(I - 2RP\,;\, l)\, dP$$

$$= \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)} \prod_{r=1}^{q} \Gamma_m(a_r) \left\{ \frac{\Gamma(a, K)}{\Gamma_m(a+b, K)} \right\} {}_{l+1}F_l\,[\nabla]$$

के रूप मे लिखा जा सकता है क्योंकि

$$(a)_k = \frac{\Gamma_m(a, K)}{\Gamma_m(a)}$$

अतः परिणाम सिद्ध हुआ।

प्रमेय 20

किसी धनात्मक निश्चित संमित आव्यूह R तथा

$R(a) > (m-1)/2,\ R(b) > (m-1)/2,\ R(a+b) > (m-1)/2;$

$R(a_r) > (m-1)/2\ (r = 1, \ldots, q),$

के लिए हमें

$$\int_{0<\sum L_r<1} \phi\left(L_1, \ldots, L_q\right) W_\gamma^{(\alpha,\beta)} \left\{ I - 2R\left(\sum L_r\right)^{-1} : l \right\} dL_1, \ldots, dL_q$$

$$= \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)} \prod_{r=1}^{q} \Gamma_m(a_r) \left\{ \frac{\Gamma_m(a, -K)}{\Gamma_m(a+b, -K)} \right\} {}_{l+1}F_l\,[\nabla] \qquad (8.5)$$

प्राप्त होता है।

इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम समीकरण (5.20) की उपपत्ति का अनुगमन करते हैं और समीकरण (8.4) में को में रूपान्तरित करते हैं तो हमें तत्समक

$$C_k\left(RS^{-1}\right) = d_{k,k}\,.\, R_1^{k_1}, \ldots, R_m^{k_m}\, |S|^{-(k_1-k_2)} \ldots, |S_m|^{-k_m}$$

मिलने की आशा होती है। शेष उपपत्ति बिल्कुल स्पष्ट है।

इन समाकलों के संशोधन निम्नवत् हैं

$$\int_{0<\sum L_r<1} \phi\Big(L_1,\ldots,L_q\Big) W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} \;\{I - 2R(I-P);\, l\}\, dL_1,\ldots,dL_q$$

$$= \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)} \left\{\prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Gamma_m(a)}\right\} |P|^{a-\frac{m+1}{2}} \;|I-P|^{b-\frac{m+1}{2}} \;{}_{l+1}F_l \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

यहाँ

$${}_{l+1}F_l \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} = \Bigg[-\gamma,\; \Delta\left(l,\; \alpha+\beta+\gamma\,\frac{m+1}{2}\right);$$

$$\times\, \Delta\left(l,\; \alpha+\frac{m+1}{2}\right);\; r(I-\mathrm{p})^l\Bigg]$$

अथवा

$$\int_{0<\sum L_r<1} \phi\Big(L_1,\ldots,L_q\Big) W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} \;\{I - 2R(I-P);\, l\}\, dL_1,\ldots,dL_q$$

$$= \xi \prod_{r=1}^{q} \Gamma_m(a_r) \left\{\frac{\Gamma_m(b,\,K)}{\Gamma_m(a+b,\,K)}\right\} C_k(R) \quad (8.7)$$

यहाँ ξ को समीकरण (7.4) द्वारा परिभाषित किया जाता है जिसे समीकरण क्रमशःसमीकरण,(8.1) तथा (8.3) में $W = I - Z$ रखकर आसानी से सिद्ध किया जाता है।

इसके बाद हम परिणाम

$$\int_{0<\sum L_r<1} \phi\Big(L_1,\ldots,L_q\Big) W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} \;\{I - 2R(I-P)^{-1};\, l\}\, dL_1,\ldots,dL_q$$

$$= \xi \prod_{r=1}^{q} \Gamma_m(a_r) \left\{\frac{\Gamma_m(b,\,-K)}{\Gamma_m(a+b,\,-K)}\right\} C_k(R) \quad (8.8)$$

लिखते हैं।

ट्रास्की [13] ने उपर्युक्त परिणाम के बीटा टाइप –II अनुरूपों को $R > 0$ के लिए निम्नवत् स्थापित किया है। हम लागेर बहुपद सम्बन्धी समाकल को निम्नवत् स्थापित करते हैं

$$\int\limits_{V>0} |V|^{a-\frac{m+1}{2}} \; |I-V|^{-(a+b)} \; W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} \{I - 2R(I+V)^{-1};\, I\} \, dV$$

$$= \xi \left(\frac{\Gamma_m(a)\,\Gamma_m(b)}{\Gamma(a+b)} \right) \left\{ \frac{(b)_k}{(a+b)_k} \right\} C_k(R) \tag{8.9}$$

जिसका सम्बन्ध (7.5) है। अपरंच,

$$P = (I+V)^{-1} V, \; J(V \to P) = |I - P|^{-(m+1)}$$

रखने पर समीकरण (8.9) से हमें

$$\int\limits_{V>0} |V|^{a-\frac{m+1}{2}} \; |I-V|^{(a+b)} \; W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} \{I - 2R(I+V);\, I\} \, dV$$

$$= \xi \int\limits_{0<P<I} |P|^{b-\frac{m+1}{2}} \; |I-P|^{a-\frac{(m+1)}{2}} \; C_k(RP^{-1}) \, dP$$

प्राप्त होता है जो समीकरण (7.4)

$$= \xi \left\{ \frac{\Gamma_m(b,\,-K)\,\Gamma_m(a)}{\Gamma_m(a+b,\,-K)} \right\} C_k(R) \tag{8.10}$$

बन जाता है। यह निम्नवत् भी बन जाता है -

$$\int\limits_{\sum V_r = W} \psi\left(V_1, \ldots, V_q \right) dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \left\{ \prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_k)}{\Gamma_m(a)} \right\} |W|^{a-\frac{m+1}{2}} \; |I-W|^{(a+b)} \tag{8.11}$$

परिणाम (7.1) से हम द्विलाम्बिक बहुपद के तत्समक को भी स्थापित कर सकते हैं जो क्षेत्रीय बहुपद वाले आव्यूह कोणांक के जैकोबी बहुपद द्वारा अनुमोदित होता है।

$$\int_{\sum V_r = W} \psi\left(V_1, \ldots, V_q\right) W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} (I - 2R \textstyle\sum V_r;\ l)\ dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \xi \left\{ \prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Gamma_m(a)} \right\} |W|^{a - \frac{m+1}{2}} \ |I - W|^{-(a+b)}\ C_k(RW) \qquad (8.12)$$

$$\int_{\sum V_r = W} \psi\left(V_1, \ldots, V_q\right) W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} \left(I - 2R\left(\textstyle\sum V_r\right)^{-1};\ l\right) dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \xi \left\{ \prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Gamma_m(a)} \right\} |W|^{a - \frac{m+1}{2}} \ |I - W|^{-(a+b)}\ C_k(RW^{-1}) \qquad (8.13)$$

$$\int_{\sum V_r = W} \psi\left(V_1, \ldots, V_q\right) W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} \left(I - 2R\left(I - \textstyle\sum V_r\right);\ l\right) dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \xi \left\{ \prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Gamma_m(a)} \right\} |W|^{a - \frac{m+1}{2}} \ |I + W|^{-(a+b)}\ C_k[R(I + W)] \qquad (8.14)$$

तथा

$$\int_{\sum V_r = W} \psi\left(V_1, \ldots, V_q\right) W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} \left(I - 2R\left(I + \textstyle\sum V_r\right)^{-1};\ l\right) dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \xi \left\{ \prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Gamma_m(a)} \right\} |W|^{a - \frac{m+1}{2}} \ |I + W|^{-(a+b)}\ C_k\left[R(I + W)^{-1}\right] \qquad (8.15)$$

(8.10) तथा (8.8) के प्रयोग से प्राप्त प्रत्येक संगत परिणाम

$$\int_{V_r = 0} \psi\left(V_1, \ldots, V_q\right) W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} (I - 2R \textstyle\sum V_r;\ l)\ dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \delta \frac{\Pi_m(\alpha + \gamma)}{\Pi_m(\alpha)} \left\{ \frac{\Gamma(a, K)\, \Gamma_m(b, -K)}{\Gamma_m(a + b)} \right\} {}_{l+1}F_l\ [\nabla] \qquad (8.16)$$

$$\int_{V_r=0} \psi\left(V_1, \ldots, V_q \right) W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} (I - 2R(\textstyle\sum V_r)^{-1} ; I)\, dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \delta \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)} \left\{ \frac{\Gamma_m(a, -K)\,\Gamma_m(b, K)}{\Gamma_m(a+b)} \right\} {}_{l+1}F_l \; [\nabla] \tag{8.17}$$

$$\int_{V_r=0} \psi\left(V_1, \ldots, V_q \right) W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} \left(I - 2R\left(I + \textstyle\sum V_r \right); I \right) dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \delta \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)} \left\{ \frac{\Gamma_m(a)\,\Gamma_m(b, -K)}{\Gamma_m(a+b, -K)} \right\} {}_{l+1}F_l \; [\nabla] \tag{8.18}$$

$$\int_{V_r=0} \psi\left(V_1, \ldots, V_q \right) W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} (I - 2R(\textstyle\sum V_r)^{-1} ; I)\, dV_1, \ldots, dV_q$$

$$= \delta \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)} \left\{ \frac{\Gamma_m(a)\,\Gamma_m(b, K)}{\Gamma_m(a+b, K)} \right\} {}_{l+1}F_l \; [\nabla] \tag{8.19}$$

ऊपर हमने

$$\delta = \prod_{r=1}^{q} \frac{\Gamma_m(a_r)}{\Gamma_m(a)} \text{ संकेतन का प्रयोग किया है।} \tag{8.20}$$

9. क्षेत्रीय बहुपद के लिए संभावित मान

यदि m-विमीय बहुचर बीटा में आव्यूह हो द्विलाम्बिक बहुपद का जिसका अनुमोदन आव्यूह कोणांक के लागेर बहुपद द्वारा होता हो तो प्रायिकता सघनता फलन निम्न प्रकार होगा–

$$\left\{ B_m(t, u) \right\}^{-1} |S|^{t - \frac{m+1}{2}} |I - S|^{u - \frac{m+1}{2}} Z_n^{\alpha} (RS; I)$$

अतः किसी धनात्मक निश्चित आव्यूह R के लिए

$$E\left[C_k(RS) \right] = \int_{S>0} \left\{ B_m(t, u) \right\}^{-1}$$

$$\times |S|^{t - \frac{m+1}{2}} |I - S|^{u - \frac{m+1}{2}} Z_n^{\alpha} (RS; I)\, dS$$

$$= \eta \frac{\Gamma_m(t, K)\,\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(t+u, K)} C_k(R) \{B_m(t, u)\}^{-1}$$

$$= \frac{\Gamma_m(\alpha + \text{ln})}{\Gamma_m(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{k} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{C_k(R)(t)}{\Gamma_m(lk + \alpha + 1)\ (t+1)_k}$$

$$= \left\{ \frac{(t)_k}{(t+u)_k} \right\} Z_n^{\alpha}(R ; l) \qquad (9.1)$$

यदि S में द्विलाम्बिक बहुपद का बहुचर गामा वितरण हो तो p. d. f. होगा

$$\{\Gamma_m(t)\}^{-1} |P|^t etr(-SP) |S|^{t-\frac{m+1}{2}} Z_n^{\alpha}(RS ; l) ; S > 0$$

तब

$$E\left[C_k(RS)\right] = \frac{|P|^t}{\Gamma_m(t)} \int_{S>0} etr(-SP) |S|^{t-\frac{m+1}{2}} Z_n^{\alpha}(RS ; l)\, dS$$

$$= \frac{\Gamma_m(t, K)}{\Gamma_m(t)} \eta C_k\left(RP^{-1}\right)$$

$$= (t)_k Z_n^{\alpha}\left[(RP)^{-1} ; l\right] \qquad (9.2)$$

यदि $R = I$, तब

$$E\left[C_k(S)\right] = (t)_k Z_n^{\alpha}\left(P^{1} ; l\right) \qquad (9.3)$$

यदि S की सघनता द्विलाम्बिक बहुपद का बहुचर बीटा टाइप –II हो जाये तो उसे

$$\{B_m(t, u)\}^{-1} |S|^{t-\frac{m+1}{2}} |I + S|^{-s+u} Z_n^{\alpha}(RS ; l)$$

द्वारा व्यक्त किया जाय तो

$$E\left[C_k(RS) \right] = \int_{s>0} \left\{ B_m(t,u) \right\}^{-1} \times |S|^{t-\frac{m+1}{2}} |I+S|^{-s+u} Z_n^{\alpha}(RS;l)\, dS \tag{9.4}$$

$$= \eta \left\{ B_m(t,u) \right\}^{-1} \frac{\Gamma_m(t,K)\,\Gamma_m(u,-K)}{\Gamma_m(t+u)} C_k(R)$$

$$E\left[C_k(RS) \right] = \frac{(t)_k\,\Gamma(u,-K)}{\Gamma_m(u)} Z_n^{\alpha}[R;l],\ u \geq m+k_1 \tag{9.5}$$

समीकरण (9.4) में S को S^{1} में रूपान्तरित करने पर

$$E\left[C_k(RS^{-1}) \right] = \int_{s>0} \left\{ B_m(t,u) \right\}^{-1} \times |S|^{t-\frac{m+1}{2}} |I+S|^{-(t+u)} Z_n^{\alpha}(RS^{-1};l)\, dS$$

$$= \eta \left\{ B_m(t,u) \right\}^{-1} \frac{\Gamma_m(t,-K)\,\Gamma_m(u,K)}{\Gamma_m(t+u)} C_k(R) \tag{9.6}$$

$$= \frac{(u)_k\,\Gamma_m(t,-K)}{\Gamma_m(t)} Z_n^{\alpha}[R;l],\ t \geq m+k_1 \tag{9.7}$$

यहाँ

$$\eta = \frac{\Gamma_m(\alpha+\ln)}{\Gamma_m(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{k} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{\Gamma_m(lk+\alpha+1)}$$

(b) माना कि S द्विलाम्बिक बहुपद का m- विमीय बहुचर बीटा आव्यूह हो तो प्रायिकता सघनता फलन होगा -

$$\left\{ B_m(t,u) \right\}^{-1} |S|^{t-\frac{m+1}{2}} |I-S|^{u-\frac{(m+1}{2}} W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(RS;l),\ 0<S<I$$

अतः किसी धनात्मक निश्चित आव्यूह R के लिए

$$E\left[C_k(RS) \right] = \int_{s>0} \left\{ B_m(t,u) \right\}^{-1} \times |S|^{t-\frac{m+1}{2}} |I+S|^{u-\frac{m+1}{2}} W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(I-2RS;l)\, dS \tag{9.8}$$

$$= \xi \frac{\Gamma_m(t, K)\,\Gamma_m(u)}{\Gamma_m(t+u, K)}\, C_k(R)\left\{B_m(t, u)\right\}^{-1}$$

$$\left\{\frac{(t)_k}{(t+u)_k}\right\} \frac{\Pi_m(\alpha+\gamma)}{\Pi_m(\alpha)}\; {}_{l+1}F_l\left[\begin{matrix} -\gamma : \Delta\left(l, \alpha+\beta+\gamma+\frac{m+1}{2}\right); \\ \Delta\left(l, \alpha+\frac{m+1}{2}\right); \end{matrix}\;(R)^{-l}\right]$$

$$= \left\{\frac{(t)_k}{(t+u)_k}\right\} W_{\gamma}^{\alpha,\beta}\,(I-2R\,;\,I) \qquad (9.9)$$

यदि S का द्विलाम्बिक बहुपद का बहुचर गामा वितरण हो तो p. d. f. होगा

$$\left\{\Gamma_m(t)\right\}^{-1} |P|^t\, etr(-SP)\, |S|^{t-\frac{m+1}{2}}\, W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(I-2RS\,;\,I)\; S>0$$

तब

$$E\left[C_k(RS)\right] = \frac{|P|\,t}{\Gamma_m(t)} \int_{s>0} (-SP)\times |S|^{t-\frac{m+1}{2}}\, W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(I-2RS\,;\,I)\, dS \qquad (9.10)$$

$$= \frac{\Gamma_m(t, K)}{\Gamma_m(t)}\, \xi C_k\left(RP^{-1}\right)$$

$$= (t)_k\, W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}\left[I-2(P)^{-1}\,;\,I\right] \qquad (9.1\text{:}$$

यदि $R = I$, तो

$$E\left[C_k(S)\right] = (t)_k\, W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}\left[I-2Z^{-1}\,;\,I\right] \qquad (9.12)$$

यदि S की सघनता लागेर बहुपद द्वारा अनुमोदित द्विलाम्बिक बहुपद के बहुचर बीटा टाइप –II हो तो इसे

$$\left\{B_m(t, u)\right\}^{-1} |S|^{t-\frac{m+1}{2}}\, |I+S|^{-(t+u)}\, W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(I-2RS\,;\,I)$$

द्वारा दिया जाय तो

$$E\left[\, C_k(RS)\,\right] = \int_{s>0} \left\{ B_m(t, u) \right\}^{-1} \times |S|^{t-\frac{m+1}{2}} \, |I+S|^{-(t+u)} \, W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} (I - 2RS \,;\, l)\, dS \tag{9.13}$$

$$= \frac{(l)_k \, \Gamma_m(u, -K)}{\Gamma_m(u)} \, W_{\gamma}^{\alpha,\beta} \, (I - 2R \,;\, l) \; u \geq m + k_1 \tag{9.14}$$

क्योंकि समीकरण (9.14) में S को S^{-1} में रूपान्तरित करने पर

$$E\left[\, C_k\left(RS^{-1}\right)\right]$$

$$= \int_{s>0} \left\{ B_m(t, u) \right\}^{-1} |S|^{t-\frac{m+1}{2}} \, |I+S|^{-(t+u)} \, W_{\gamma}^{(\alpha,\beta)} (I - 2RS^{-1} \,;\, l)\, dS \tag{9.15}$$

$$= \xi \left\{ B_m(t, u) \right\}^{-1} \left\{ \frac{\Gamma_m(t, -K)\, \Gamma_m(u, K)}{\Gamma_m(t + u)} \right\} C_k(R)$$

$$E\left[\, C_k\left(RS^{-1}\right)\right]$$

$$= \frac{(u)_k \, \Gamma_m(t, -K)}{\Gamma_m(t)} \, W_{\gamma}^{\alpha,\beta} \, (I - 2R \,;\, l) \; u \geq m + k_1 \tag{9.16}$$

यहाँ

$$\xi = \frac{\Gamma_m(\alpha + \gamma)}{\Gamma_m(\alpha)} \sum_{k=0}^{\gamma} \sum_{k} \frac{(-\gamma)_k \;\; \Delta\left(l,\, \alpha + \beta + \gamma + \frac{m+1}{2}\right)_k}{k! \;\; \Delta\left(l,\, \alpha + \frac{m+1}{2}\right)_k}$$

निर्देश

1. कांस्टैन्टाइन, ए. जी. : Ann Math Statics, 1963, 34
2. डे वाल, डी. जे., : South African Staist J., 1970, 7, 47-60.
3. जेम्स, ए. टी. : Ann of Math, 1961, 74, 456-459
4. मथाई, ए. एम. : Nat. Acad. Sci. India, 1995, LXV. Sec A, part II, 121-141.

5. मथाई, ए. एम. : Nat Acad. Sci. India, 1995, LXV. Sec. A, part III, 227-246.

6. मथाई, ए. एम. : Nat. Acad. Sci. India, 1996, LXVI, Part I, 1-21.

7. मथाई, ए. एम. तथा सक्सेना आर. के. : The H functions with applications in statistics and other disciplines, Wiley Eastern Limited, New Delhi, India (1978).

8. सुब्रमन्यन, के. : Recent trends in multivariate normal distribution theory : On the zonal polynomials and other functions of matrix argument (1976).

9. सक्सेना, आर. के., सेठी, पी. एल. तथा गुप्ता, ओ. पी. : Indian J. Pure Appl. Math, 1996, 23 (3) : 371-380.

10. सेठी, पी. एल. तथा व्यास, ए. के. : विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1997, 40(3), 167-178.

11. सेठी, पी. एल. तथा मिश्रा, ए. के. : ज्ञानाभ में प्रकाशनार्थ स्वीकृत

12. पूनम कुमारी तथा सेठी, पी एल. : Bull, Cal, Maths Soc, 1993, 85, 319-324.

13. ट्रास्की, सी. जी. : South African Statis. J., 1972, 16, 151-163.

14. रेनविले, ई. डी. : Special functions, The Macmillan Company, New York, (1960), 23, 32.

15. मथाई, ए. एम. तथा प्रोवोस्ट, एस. बी : Quadratic form random variable : Theory and application. Marcel Dekkar, New York, (1992).

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. 100 or £ 12 or $ 40
Per Vol. Rs. 25 or 3£ or $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211 002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
७ बेली एवन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854 640405

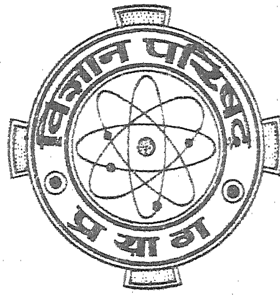
ISSN : 0505 - 5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 42 July 1999 No. 3



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

विषय-सूची

Vol. 42 July 1999 No. 3

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 3, July, 1999.

अवरक्त तथा पराबैंगनी क्षेत्रों में हैलोजनों में जोशी प्रभाव का तुलनात्मक अध्ययन

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कॉलिज, मेरठ

[प्राप्त - सितम्बर 12, 1998]

सारांश

अवरक्त तथा पराबैंगनी विकिरणों के अन्तर्गत धनात्मक तथा ॠणात्मक जोशी प्रभावों $\pm\Delta_i$ का अध्यन किया गया और यह स्थापित किया गया है कि दोनों $+\Delta_i$ तथा $-\Delta_i$ को हैलोजनों में अवरक्त आवृत्ति के द्वारा भी उत्पन्न किया जा सकता है। पराबैंगनी आवृत्तियों को प्रयुक्त करके इन परिणामों की तुलना की गई है। परिणामों से संकेत मिल है कि $\pm\Delta_i$ पराबैंगनी में अधिकतम है तथा क्रमशः घटकर न्यूनतम हो जाता है और 7-15% परिमाण का पर्याप्त $+\Delta_i$ अवरक्त आवृत्ति के साथ भी संसूचित किया जा सकता है। प्रभाव का पृष्ठीय स्रोत होने तथा अधिशोषित तल का न्यून कार्यफलन का होने के औचित्य का पुनरीक्षण किया गया है। प्रस्तुत अन्वेषण से यह विचार प्रस्फुटित होता है कि उपयुक्त प्रकार से समायोजित विसर्जन-नली उन विकिरणों को संसूचित करने में समर्थ हो सकती है जिन्हें सामान्यतः प्रकाश-वैद्युत सेल करने में असमर्थ रहते हैं।

Abstract

Comparative studies of the Joshi effect in halogens in infra-red and ultra-violet regions. *By* Jagdish Prashad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Studies of the positive and negative Joshi effects with infrared and ultraviolet radiations have been made and it has been established that both $+\Delta_i$ and $-\Delta_i$ are capable of being produced in halogens even with ir frequency. A comparison of these results have been made by using uv frequencies. The results have indicated that $\pm\Delta_i$ is maximum in uv and decreases progressively to a minimum and that appreciable $\pm\Delta_i$ of 7-15% magnitude can be detected even with ir frequencies. The validity of attributing the effect to surface origin and of assuming the adsorbed layer as having a low work function, is being revealed. The present investigation is suggestive of the idea that a suitably adjusted discharge tube can detect radiations not ordinarily done by photo-electric cells.

किरणन-प्रकाश की प्रकृति पर जोशी प्रभाव की विशिष्ट निर्भरता की ओर प्राराम्भिक अन्वेषकों ने संकेत किया है।[1, 2] Δ_i के परिमाण का आवृत्ति से साथ वृद्धि होने का अवलोकन हुआ है।[2, 3] दृश्य विकिरणों द्वारा ऑक्सीजन में Δ_i का मान हरा-लाल क्षेत्र की तुलना में नीले क्षेत्र में अधिक पाया गया है।[2] चूँकि Δ_i प्रभाव का अन्तिम छोर के लाल[4] तथा अन्य विकिरणों[3, 5, 6] में प्रेक्षण किया जा सका है, अतः अवरक्त (ir) क्षेत्र में भी इसके अवलोकित होने की सम्भावना है। फलतः अवरक्त तथा पराबैंगनी (uv) क्षेत्रों में हैलोजनों में Δ_i की उत्पत्ति की सविस्तार अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

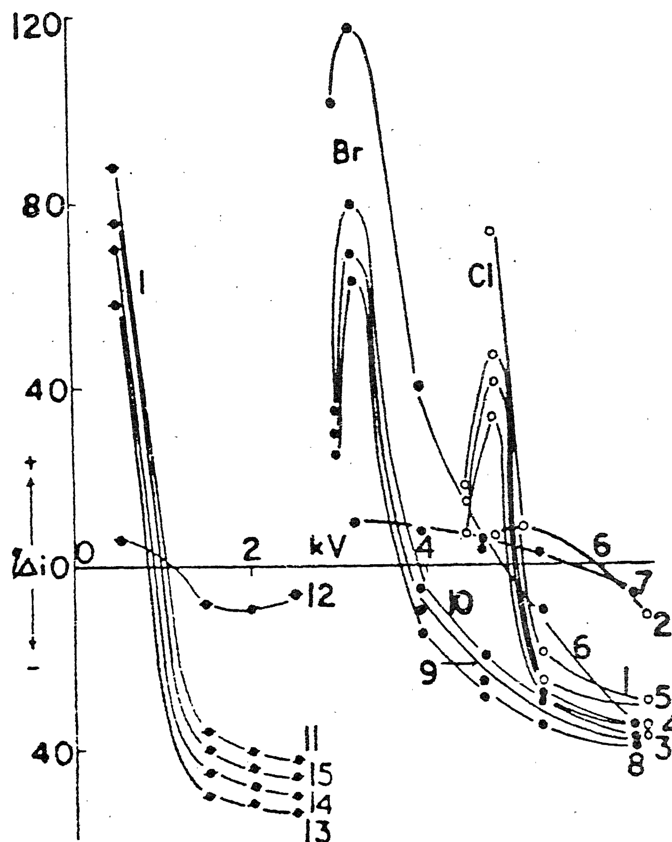
प्रयुक्त उपकरण तथा विद्युत-परिपथ पूर्वप्रकाशित[7, 8] प्रयोगों के समान रखे गए हैं। ओजोनित्रों को 120 मिमी 20° C पर क्लोरीन गैस से तथा 20° C पर अपने-अपने वाष्प-दाब पर ब्रोमीन व आयोडीन वाष्पों से भरकर, उनमें क्वार्ट्ज के गवाक्ष स्थापित कर दिये गए। पोलेराइड XRX अवरक्त फिल्टरों को प्रयुक्त करते हुए Δi का मापन किया गया जो अवरक्त-पारगम्य, दृश्य अवशोषक तथा अध्रुवीकारक हैं। एक मानक 76 वोल्ट इन्सल्कन ग्लोवर, 3.4 सेमी सम्पूर्ण लम्बाई तथा 0.14 सेमी व्यास,को अवरक्त विकीर्णक स्रोत के रूप में प्रयुक्त किया गया। छनित तथा अछनित विकिरणों के साथ Δi का प्रेक्षण किया गया। 10^{-7}% से कम प्रभावी दृश्य पारगम्यता वाले XRX10 फ़िल्टर को सबसे अधिक उपयुक्त पाया गया। 2.5 ऐम्पियर के पारद-वाष्प दीप को uv स्रोत के रूप में प्रयुक्त किया गया तथा उपयुक्त फिल्टरों को प्रयुक्त करते हुए Δ_i का प्रेक्षण शुद्ध u v तथा दृश्य विकिरणों के साथ किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

यह उल्लेखनीय है कि 7-15% कोटि के दोनों $\pm\Delta_i$ का अवलोकन हैलोजनों में i r सदृश निम्न आवृत्ति के विकिरणों के साथ हुआ। Δ_i का मान uv के लिए अधिकतम तथा i r के लिए न्यूनतम था (चित्र 1)

आइन्स्टाइन का प्रकाश-रासायनिक तुल्यता नियम निकाय द्वारा विकिरणों के रूप में अवशोषित ऊर्जा प्रति मोल को प्रदर्शित करता है। इस नियम पर आधारित परिकलनों से किसी विशिष्ट तरंग-दैर्ध्य

से संलग्न ऊर्जा-अंश का पता लगता है। प्रस्तुत अन्वेषणों के दौरान अधिकतम प्रयुक्त आवृत्ति uv 71किलोकैलोरी तथा न्यूनतम ir 28 किलोकैलोरी थी। ir विकिरण के फ़ोटॉनों की ऊर्जा प्रयुक्त गैस के आयनीकरण-विभव से बहुत नीचे है और गैस के आयतन से या काँचभित्ति के तल से तथा धात्विक इलेक्ट्रोडों से प्रकाश- इलेक्ट्रॉनों के उत्सर्जन की सम्भावना नहीं है, क्योंकि प्रकाश विकिरण की ऊर्जा बहुत कम है।



चित्र 1-ir दृश्य तथा uv विकिरणों के अन्तर्गत हैलोजनों में विभव के साथ जोशी प्रभाव का परिवर्तन (वक्र 1-5 : क्लोरीन के लिए; 6-10 : ब्रोमीन के लिए; 11-15 : आयोडीन के लिए; 1, 6, 11 : अछनित ir के साथ; 2, 7, 12 : छनित शुद्ध ir के साथ; 3, 8, 13 : अछनित uv के साथ; 4, 7, 14 : छनित शुद्ध uv के साथ; 5, 10, 15 : छनित दृश्य विकिरणों के साथ)।

प्रस्तुत अध्ययन में, 7–15% परिमाण के Δi का प्रेक्षण ir विकिरणों के साथ हुआ है, अतः इस प्रायोगिक प्रेक्षण की व्याख्या करने के लिए हमें Δi के अधिशोषण-सिद्धान्त[9] का आश्रय लेने के लिए बाध्य होना पड़ता है, क्योंकि इसके अतिरिक्त इस प्रक्षेण की व्याख्या सम्भव नहीं है।

इस अध्ययन से सक्रियित अधिशोषित-तल के कार्यफलन के विषय में गुणात्मक दृष्टि प्राप्त होती है। किसी तल से प्रकाश-इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन के लिए आइन्सटाइन-समीकरण है :

$$h\upsilon = \frac{1}{2}mv^2 + w,$$

जिसमें m इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान, w तल का कार्यफलन, υ प्रकाश की आवृत्ति तथा v फोटो-इलेक्ट्रॉन का वेग है। फोटॉन द्वारा अधिशोषित तल से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉनों के लिए यह समीकरण लागू होना चाहिए। यदि यह मान लिया जाए कि तल से उत्सर्जन के समय वेग शून्य था, तब $h\upsilon_0 = w$, जबकि V_0 देहली-आवृत्ति है। जोशी प्रभाव Δi की ir विकिरणों द्वारा उत्पत्ति प्रकट करती है कि यह क्रान्तिक देहली-आवृत्ति ir क्षेत्र में अवस्थित है और इस प्रकार अधिशोषित तल का कार्यफलन निम्न परिमाण का प्रतीत होता है--जैसा कि Δi अधिशोषण-सिद्धान्त[9] में माना गया है।

पुनश्च, ir स्तर के कम ऊर्जा वाले विकिरणों द्वारा $\pm\Delta i$ की उत्पत्ति इंगित करती है कि बहुत निम्न स्तर के विकिरणों के लिए भी जोशी प्रभाव को अत्यन्त संवेदनशील बनाया जा सकता है। ir विकिरणों को संसूचित करने में एक अत्यन्त सुग्राही प्रकाश-विद्युत सेल भी असमर्थ रहता है। अस्तु, प्रस्तुत अन्वेषण निर्देशित करता है कि उपयुक्त प्रकार से समायोजित की गई विसर्जन-नली को उन विकिरणों को संसूचित करने में प्रयुक्त किया जा सकता है जिन्हें सामान्यतः प्रकाश विद्युत् सेल नहीं कर पाते हैं।

uv के साथ अधिकतम $\pm\Delta i$ की उत्पत्ति तथा ir के साथ पर्याप्त $\pm\Delta i$ का संसूचन पुनः प्रकट करता है कि $+\Delta i$ से $-\Delta i$ में उत्क्रमण अनुप्रयुक्त विभव पर एक v स्थिर पर तथा v की वृद्धि के साथ एक स्थिर V पर, होता है। यह उल्लेखनीय है कि υ बढ़ने के साथ उत्क्रमण-विभव Vi घट जाता है। चित्र 1 प्रदर्शित करता है कि शुद्ध uv आवृत्तियों की तुलना में ir आवृत्ति के साथ Vi का मान अधिक है। मध्यम श्रेणी के परास में υ के बढ़ने से, $\pm\Delta i$ तदनुसार बढ़ जाता है। इसका कारण उत्सर्जित प्रकाश-इलेक्ट्रॉनों की संख्या में बहुत बड़ा परिवर्तन होना हो सकता है। प्रस्तुत अध्ययन में प्राप्त परिणाम स्पष्ट घोषणा कर रहे हैं कि जोशी प्रभाव Δi–क्रिया आवृत्ति या क्वान्टाइक प्रभाव है, न कि चयनीय प्रकाश अवशोषण की विशेषता।

कृतज्ञता-ज्ञापन

डॉ० एम० वेनुगोपालन के अमूल्य सुझावों के लिए लेखक आभारी है।

निर्देश

1. जोशी, एस. एस. : प्रोसी० इण्डियन साइंस कांग्रेस, भाग II, 1943, 70.
2. मोहन्ती, एस. आर. तथा कामथ, जी. एम. : जर्न० इण्डियन केमि. सोसा., 1948, 25, 467.
3. जोशी, एस. एस. : करेंट साइंस, 1945, 14, 317.
4. देव, पी. जी. : इण्डियन जर्न. फिजि., 1944, 18, 83.
5. जोशी, एस. एस. : करेंट साइंस, 1944, 13, 278.
6. जोशी, एस. एस. : वही, 1945, 14, 35.
7. प्रसाद, जे. : इस्लामाबाद जर्न. साइंस, 1979, (6) 1-2, 55.
8. प्रसाद, जे. : रिव रूमेन किम., 1973, 18, 1075.
9. जोशी, एस. एस. : प्रोसी. इण्डियन साइंस कांग्रेस, प्रेजि. ऐड. केमि. सेक., 1943, 51.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No.3, July, 1999.

दो चरों वाला हार्नफलन तथा दो परिसीमा मान समस्याओं में इसका सम्प्रयोग

एस० एस० श्रीवास्तव

गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, जयसिंह नगर, शहडोल (म० प्र०)

[प्राप्त – अगस्त 11, 1997]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हम सबसे पहले दो चर वाले हार्न फलन में संबंधित एक समाकल प्राप्त करेंगे और फिर उसका उपयोग दो सीमा समस्याओं (1) छड़ में उष्मा चालकता तथा (2) कम्पित डोरी का विस्थापन को हल करने में करेंगे।

Abstract

Horn function of two variables and its applications in two boundary value problems. *By* S. S. Srivastava, Department of Mathematics, Govt. College Jaisingh Nagar, Shahdol (M.P).

In the present paper first we obtain an integral involving Horn function of two variables and then we make its applications to solve two boundary value problems (1) on heat conduction in a rod and (2) on deflection of vabrating string.

1. प्रस्तावना

दो चरों वाला हार्न फलन H_3 एर्डेल्यी [1 p. 224-226] में दिया हुआ है और निम्नवत् परिभाषित किया जाता है–

$$H_3(\alpha, \beta; \gamma; x, y) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(\alpha, r-s)(\beta, r)}{(1, r)(1, s)(\gamma, r)} x^r y^s, \tag{1.1}$$

जहाँ (λ, n) समान्य पोछमर संकेत है जिससे कि

$$(\alpha, n) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n - 1); \ (\alpha, 0) = 1.$$

इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित समाकल [2, p. 272 (1)] के संशोधित रूप का प्रयोग करेंगे–

$$\int_0^L \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right) \sin\frac{\pi x \lambda_m}{L} dx = \frac{\Gamma(w) L \sin\frac{\pi \lambda_m}{2}}{2^{w-1}\Gamma\left(\frac{w+\lambda_m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w-\lambda_m+1}{2}\right)}, \ \mathrm{Re}(w) > 0. \tag{1.2}$$

2. समाकल

जिस समाकल का मान ज्ञात किया जाना है वह है

$$\int_0^L \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} \sin\frac{\pi \lambda_m x}{2} \times H_3\left(\alpha, \frac{w+\lambda_m+1}{2}; \frac{w}{2}; z_1\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^2, z_2\right) dx$$

$$= \frac{L \sin\frac{\pi \lambda_m}{2}\Gamma(w)}{2^{w-1}\Gamma\left(\frac{w+\lambda_m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w-\lambda_m+1}{2}\right)} \times H_3\left(\alpha, \frac{w+1}{2}; \frac{w-\lambda_m+1}{2}; \ z_1, z_2\right). \tag{2.1}$$

(2.1) की उत्पत्ति

माना कि

$$\phi = \int_0^L \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} \sin\frac{\pi \lambda w^x}{L} \times H_3\left(\alpha, \frac{w+\lambda_m+1}{2}; \frac{w}{2}; z_1\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^2, z_2\right) dx$$

अब हम H_3 को श्रेणी रूप में व्यक्त करते हैं तथा संकलन और समाकल का क्रम बदलते हैं तो (2.1) की सहायता से हमें निम्न की प्राप्ति होती है।

$$\phi = \frac{L \sin(\lambda_m \pi)/2}{2^{w-1}}$$

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(\alpha,\ r-s)\left(\frac{w+\lambda_m+1}{2},\ r\right)\Gamma(w+2r)}{(1,r)(1,s)\left(\frac{w}{2},r\right)\Gamma\left(\frac{w+2r+\lambda_m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w+2r-\lambda_m+1}{2}\right)}\left(\frac{z_1}{4}\right)^r z_2^s .$$

पुनः

$$(\alpha,\ n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \tag{2.2}$$

तथा

$$(\alpha,\ 2n) = 2^{2n}\left(\frac{\alpha}{2},\ n\right)\left(\frac{\alpha+1}{2},\ n\right), \tag{2.3}$$

परिणामों का उपयोग करने पर हमें

$$\phi = \frac{L \sin\frac{\pi\lambda_m}{2}\Gamma(w)}{2^{w-1}\Gamma\left(\frac{w+\lambda_m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w-\lambda_m+1}{2}\right)}$$

$$\times \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(\alpha,\ r-s)\left(\frac{w+1}{2},\ r\right)}{(1,\ r)(1,\ s)\left(\frac{w-\lambda_m+1}{2},\ r\right)} \cdot z_1^r z_2^s$$

प्राप्त होता है जो (1.1) के प्रकाश में (2.1) को प्रदान करता है।

3. छड़ में उष्मा चालकता के सन्दर्भ में सम्प्रयोग

इस अनुभाग में कतिपय परिसीमा प्रतिबन्धों के अन्तर्गत छड़ में बाह्य ऊष्मा संचालन की समस्या पर विचार करेगें। यदि उष्मीय गुणांक स्थिर हों और उष्मीय ऊर्जा का कोई स्रोत न हो तो एक-विमीय छड़ $0 \leq x \leq L$ में ताप $u(x, t)$ निम्नलिखित ऊष्मा समीकरण को तुष्ट करेगा।

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t \geq 0\ . \tag{3.1}$$

यदि हम निम्नलिखित परिसीमा प्रतिबन्ध लें

$$u(o,t)=0,$$

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x}+hu(L,t)=0 \tag{3.3}$$

$u(x,t)$ सान्त है ज्यों ज्यों $t\to\infty$ तथा आरम्भिक प्रतिबन्ध

$$u(x,0)=f(x) \tag{3.4}$$

तो आंशिक अवकल समीकरण (3.1) का हल निर्देश [3 p. 77 (4)] के अनुसार दिया जायेगा।

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\frac{\pi\lambda_m x}{L}\exp\left\{-\left(\frac{\pi\lambda_m}{L}\right)^2 kt\right\}, \tag{3.5}$$

जहाँ λ_1........, λ_m मूल हैं अबीजीय समीकरण (3.6) के

$$\tan\pi\lambda_m=\frac{\pi\lambda_m}{kL}. \tag{3.6}$$

अब हम $u(x,t)$ को ज्ञात करने की समस्या पर विचार करेंगे जहाँ

$$u(x,0)=f(x)$$

$$=\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1}H_3\left(\alpha,\frac{w+\lambda_m+1}{2};\frac{w}{2};z_1\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^2,z_2\right). \tag{3.7}$$

4. समस्या का हल

(3.5) तथा (3.7) को मिलाने तथा समाकल (2.1) का उपयोग करने पर

$$A_m=\frac{\pi\lambda_m\sin\frac{\pi\lambda_m}{2}\;\Gamma(w)}{2^{w-3}\left[2\pi\lambda_m-\sin 2\pi\lambda_m\right]\Gamma\left(\frac{w+\lambda_m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w+\lambda_m+1}{2}\right)}$$

$$H_3\left(\alpha,\frac{w+1}{2};\frac{w-\lambda_m+1}{2};z_1,z_2\right). \tag{4.1}$$

(3.5) में A_m का मान (4.1) से लेकर रखने पर हमें समस्या का वंछित हल प्राप्त होता है जो निम्नवत् है

$$u(x,t) = \frac{\pi\,\Gamma(w)}{2^{w-3}} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{\pi\lambda_m x}{L} \exp\left\{-\left(\frac{\pi\lambda_m}{L}\right)^2 k\,t\right\}$$

$$\times \frac{\lambda_m \sin\frac{\pi\lambda_m}{2}}{\left[2\pi\lambda_m - \sin 2\pi\lambda_m\right]\Gamma\left(\frac{w+\lambda_m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w-\lambda_m+1}{2}\right)}$$

$$\times H_3\left(\alpha, \frac{w+1}{2}; \frac{w-\lambda_m+1}{2}; z_1, z_2\right). \tag{4.2}$$

5. प्रसार सूत्र

(3.5) में (3.7) तथा (4.1) का उपयोग करने पर हम निम्नलिखित प्रसार सूत्र व्युत्पन्न करते हैं।

$$\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} H_3\left(\alpha, \frac{w+\lambda_m+1}{2}, \frac{w}{2}; z_1\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^2, z_2\right)$$

$$= \frac{\pi\,\Gamma(w)}{2^{w-3}} \sum_{m=1}^{\infty} \times \frac{\lambda_m \sin\frac{\pi\lambda_m}{2} \sin\frac{\pi\lambda_m x}{L}}{\left[2\pi\lambda_m - \sin 2\pi\lambda_m\right]\Gamma\left(\frac{w+\lambda_m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w+\lambda_m+1}{2}\right)}$$

$$\times H_3\left(\alpha, \frac{w+1}{2}; \frac{w-\lambda_m+1}{2}; z_1, z_2\right). \tag{5.1}$$

6. समांग तरंग समस्या का सम्प्रयोग

इस अनुभाग में हम स्पन्दमान डोरी का विक्षेपण $u(x, t)$ ज्ञात करेंगे। यदि डोरी के भार के कारण होने पर विक्षेपण नगण्य हों तो $u(x, t)$ तुष्ट करता है आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1\,\partial^2 u}{c\,2t^2}, \; 0 < x < L, \; t > 0.$$

को। हम परिसीमा प्रतिबन्धों

$$u(0,t)=0,\, u(L,t)=0,\, t>0, \tag{6.2}$$

तथा प्रारम्भिक दशाओं

तथा $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)\,(\text{प्रारम्भिक वेग}) \tag{6.3}$$

$$u(x,0)=f(x). \tag{6.4}$$

की कल्पना करते हैं। तो आंशिक समाकल समीकरण (6.1) का हल

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \cos\frac{\pi\lambda_m ct}{L}+b_m \sin\frac{\pi\lambda_m ct}{L}\right]\sin\frac{\pi\lambda_m x}{L}. \tag{6.5}$$

द्वारा दिया जाता है। अब हम $\mu(x, t)$ को ज्ञात करने की समस्या पर विचार करेंगे जहाँ $u(x, 0)\ (=f(x))$को (3.7) से व्यक्त करते हैं जबकि

$$g(x)=\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w'-1}\times H_3\left(\alpha',\frac{w'-\lambda_m+1}{2};\frac{w'}{2};z_1,\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^2,z_2\right). \tag{6.6}$$

(6.3), (6.4) तथा (6.5), से यह स्पष्ट है कि

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m \sin\frac{\pi\lambda_m x}{L} \tag{6.7}$$

तथा $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)=\frac{\pi c}{L}\sum_{m=1}^{\infty}b_m\lambda_m \sin\frac{\lambda_m x\pi}{L}. \tag{6.8}$$

अब समाकल (2.1) का प्रयोग करने पर हमें a_m तथा b_m के अलग अलग मान प्राप्त होते हैं जिन्हें (6.5) में रखने पर समस्या का हल निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

$$u(x,t)=\frac{\pi\,\Gamma(w)}{2^{w-3}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m\cos\dfrac{\pi\lambda_m ct}{L}\sin\dfrac{\pi\lambda_m x}{L}\sin\dfrac{\pi\lambda_m}{2}}{\left[2\pi\lambda_m-\sin 2\pi\lambda_m\right]\Gamma\left(\dfrac{w+\lambda_m+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{w-\lambda_m+1}{2}\right)}$$

$$\times H_3\left(\alpha,\frac{w+1}{2};\frac{w-\lambda_m+1}{2};z_1,z_2\right)+\frac{L\,\Gamma(w')}{2^{w'-3}}\sum_{m=1}^{\infty}$$

$$\times\frac{\sin\dfrac{\pi\lambda_m}{2}\sin\dfrac{\pi\lambda_m ct}{L}\sin\dfrac{\pi\lambda_m x}{L}}{\left[2\pi\lambda_m-\sin 2\pi\lambda_m\right]\Gamma\left(\dfrac{w'+\lambda_m+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{w'-\lambda_m+1}{2}\right)}$$

$$\times H_3\left(\alpha',\frac{w'+1}{2};\frac{w'-\lambda_m+1}{2};z_1,z_2\right). \qquad (6.9)$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक माडेल साइंस कालेज रीवां के गणित के प्रोफेसर डॉ० बी० एम० एल० श्रीवास्तव के प्रति आभार व्यक्त करता है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में रुचि दिखाई और मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, : Higher Transcendetal Function, Pt. I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1953

2. ग्रैडश्तयेन, आई० एस० तथा राइज़िक, आई० एम० : Tables of Integrals Series and Products, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क, 1980

3. सोमरफेल्ड ए०, : Partial Differential Equation in Physics, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क,1949.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No.3, July, 1999.

सौर-पवन में उपस्थित चुम्बकीय मेघों का आन्तर्ग्रहिक तथा भूचुम्बकत्वीय प्रभाव

सुभाष चन्द्र कौशिक

भौतिक शास्त्र विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, सीधी, (म० प्र०)

तथा

पंकज श्रीवास्तव

भौतिक शास्त्र विभाग, शासकीय नवीन महाविद्यालय, रीवा, (म० प्र०)

[प्राप्त–जुलाई 8, 1998]

सारांश

चुम्बकीय मेघ सौर-पवन में उपस्थित दीर्घ-परासी संरचनायें हैं जिन्हें उनके विशेष गुणों के द्वारा पहचाना तथा वर्गीकृत किया जाता है। इनमें (1) चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा शनैः शनैः एक विस्तृत कोण से घूमती है, (2) चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता औसत से अधिक होती है तथा (3) प्रोटॉन दाब व चुम्बकीय दाब का अनुपात 1 से कम होता है। परिवर्तनशील दिशा के अनुसार इन्हें दो श्रेणियों में विभक्त किया जाता है—धनात्मक तथा ऋणात्मक चुम्बकीय मेघ। प्रस्तुत प्रपत्र में 21 मेघों के विभिन्न आन्तर्ग्रहिक लक्षणों तथा भूचुम्बकीय प्रभावों का क्री के कालखण्ड सिद्धांत द्वारा अध्ययन किया गया है। ये मेघ 1979-86 तक सौर-पवन में प्रकट हुये थे। भूचुम्बकीय प्रभाव दर्शाने के लिये Dst Index को प्रस्तुत किया गया है। परिणामों से स्पष्ट है कि चुम्बकीय मेघ आन्तर्ग्रहिक Bz क्षेत्र में ह्रास उत्पन्न करते हैं तथा ताप व घनत्व में भी क्षय होता यद्यपि धनात्मक मेघ इनमें वृद्धि करते है। Dst Index में भी स्पष्ट रूप से ह्रास प्रदर्शित करते हुये मेघ निर्मलित होकर शक्तिशाली तूफान/झंझावात उत्पन्न करते हैं जो पूर्व के परिणामों की पुष्टि करता है।

Abstract

Magnetic cloud structures in the solarwind : their interplanetary and geomagnetic influences. *By* Subhash C. Kaushik, Department of Physics, Govt. Autonomous College, Sidhi (M. P.) and Pankaj K. Shrivastava, Department of Physics, Govt. New Science College, Rewa (M. P.)

A magnetic cloud is an interplanetary ejection with following characteristics : (i) the magnetic field direction rotates smoothly through a large angle (ii) the magnetic field strength is higher than average and (iii) the ratio of proton pressure to magnetic pressure is much less than 1. Magnetic cloud (MC) is called a "positive cloud" if at space craft onset the magnetic field direction is towards northward and it is called a "negative cloud" if, at space craft onset, magnetic field is directed southward. In the present anaylsis we have identified 21 magnetic clouds for the interval of 1979-1986, which covers the descending phase of solar cycle 21. We have done the Chree analysis to derive the relationship of MC with various interplanetary feature such as solar wind velocity, temperature, density, magnetic field B and Bz component as well as on geomagnetic field of Earth. Dst index has been taken as an indicator of enhanced geomagnetic activities. The results of analysis produce significant evidence for association of negative magnetic clouds with transient decrease in Bz component of IMF. We further observe decrease in temperature and density of solar plasma after the event if negative MC, while in case of positive MC, these two features show an increase. Further analyses for geomagnetic field indicate a large transient decrease in Dst values near the arrival of magnetic clouds.

सौर-कान्ति-चक्र अपने चारों ओर स्थित आन्तर्ग्रहिक आकाश से अधिक तापमान होता है, परिणामस्वरूप उष्मा का प्रवाह सौर-पवन के रूप में सूर्य से बाह्य आकाश की ओर होता है। सौर-पवन एक उच्च आयनित तथा चुम्बकीय प्रभाव युक्त उष्मीय अभिवाह (फ्लक्स) है जिसका सर्वप्रथम पार्कर ने पूर्वानुमान किया था।[1] सौर-पवन में विशेषतः ऊर्जा के प्रवाहक इलेक्ट्रान होते हैं जो धन आयनों की तुलना में हल्के होने के कारण उष्मा के प्रवाह में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। प्रयोगों द्वारा सिद्ध किया जा चुका है कि 80 eV–1 kev ऊर्जा वाले इलेक्ट्रान ही उष्मीय फ्लक्स के वाहक होते हैं जिन्हें परिवेश संख्या (Halo Population) कहा जाता है।[2,3] यह सिद्ध हो चुका है कि पृथ्वी के वायुमंडल में उत्पन्न होने वाले विक्षोभों का मूल सूर्य के तल पर स्थित सक्रिय क्षेत्र ही है जिनकी सक्रियता काल के अनुसार परिवर्तनशील है। अधिकतम सक्रियता के समय सौर पटल पर स्थित सौर कलंक (Sunspot) की संख्या सर्वाधिक होती है। चक्रण करते-करते ये सौर-कलंक लुप्तप्राय हो जाते हैं तथा उनकी न्यूनतम उपस्थिति की अवस्था ही सूर्य की न्यूनतम सक्रियता वाली स्थिति का ज्ञान प्रदान करती है। एक न्यूनतम सक्रिय अवस्था में अधिकतम सक्रिय अवस्था आने में 11 वर्ष का समय लगता है जिसे एक सौर-चक्र कहा

जाता है। वर्तमान में 23वाँ सौर-चक्र प्रगति में है। पूर्ण सूर्य ग्रहण के समय सूर्य की आंतरिक संरचना का अध्ययन सरल होता है क्योंकि तब हम कांति-चक्र, हीरक वलय (डायमंड रिंग) तथा अन्य घटनाओं यथा सौर-ज्वाला, परिज्वाल द्रव्यमान उत्सर्जन इत्यादि का प्रत्यक्ष अवलोकन कर सकते हैं।

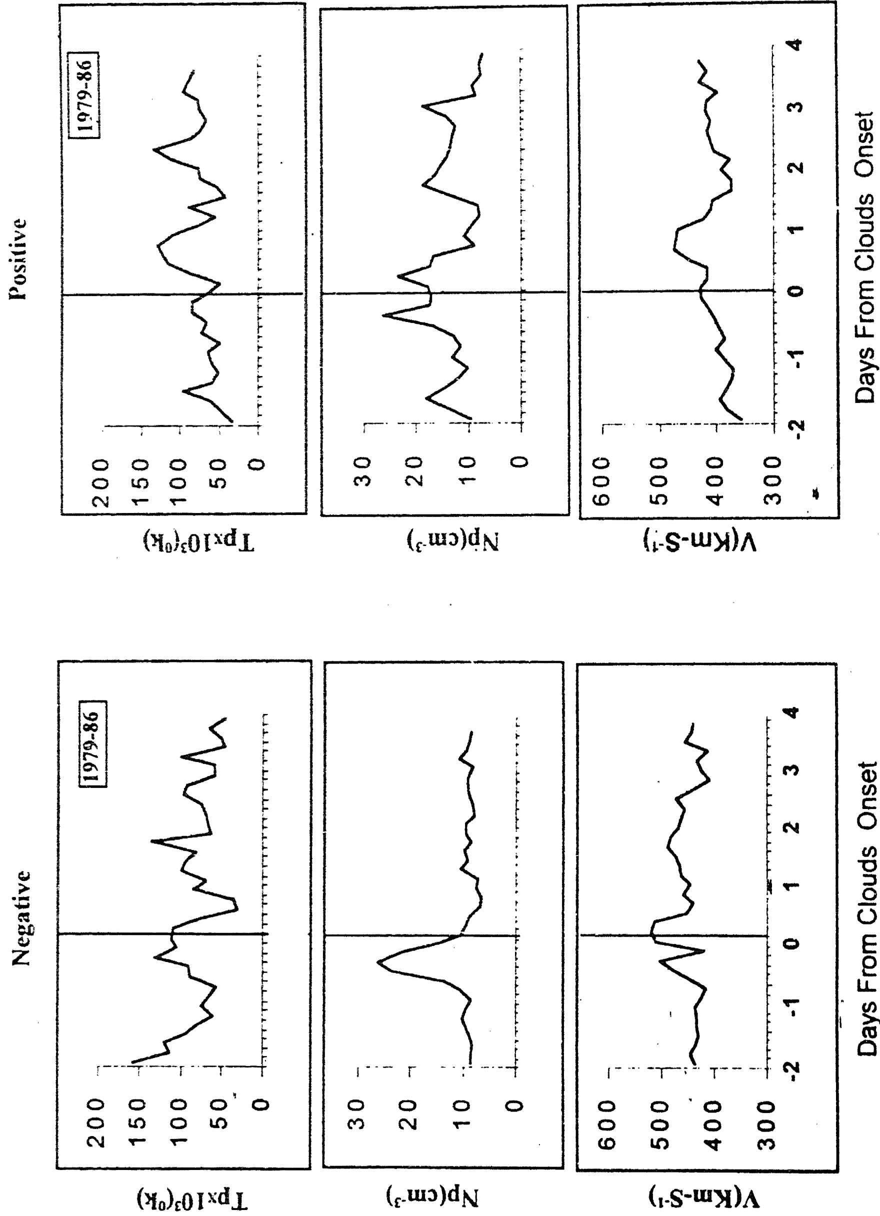
यह सिद्ध हो चुका है कि सौर-पवन में उपस्थित आवेशित कणों तथा पृथ्वी के भू-चुम्बकीय क्षेत्र में तीव्र अन्योन्यक्रिया सौर-पवन में उपस्थित आवेशों की वितरण संरचना पर निर्भर करती है। चुम्बकीय मेघ सौर-पवन में उपस्थित एक विशेष प्रकार की दीर्घ-परासी आन्तर्ग्रहिक संरचनाएँ हैं जिनका आकार .12 – .25 AU तक होता है। यहाँ ज्ञातव्य है कि सूर्य से पृथ्वी की दूरी 1 AU होती है। इनके विस्तृत गुणों को सर्वप्रथम 1981 में वैज्ञानिकों ने उपग्रह संचालित प्रयोगों से प्राप्त किया था।[4] सूर्य तथा पृथ्वी के मध्य 1 AU से लेकर 2 AU तक भ्रमण कर रहे 5 उपग्रहों द्वारा सौर-पवन में सक्रिय सूर्य से उत्सर्जित प्लाज्मा के चुम्बकीय क्षेत्र B का अध्ययन करने पर निष्कर्ष प्राप्त हुआ कि चुम्बकीय मेघ में निहित B का परिणाम तथा तीव्रता इसके परिवेश की तुलना में अधिक है। किन्तु ताप में कमी पायी गई इनकी खोज के पश्चात् आन्तर्ग्रह के दूसरे पैरामीटरों से इनके संबंध/प्रभाव ज्ञात करने के लिये वैज्ञानिकों ने 1982 में इनका वर्गीकरण तीन प्रकार से किया था।[5]

(i) आघात तरंग से युक्त मेघ।

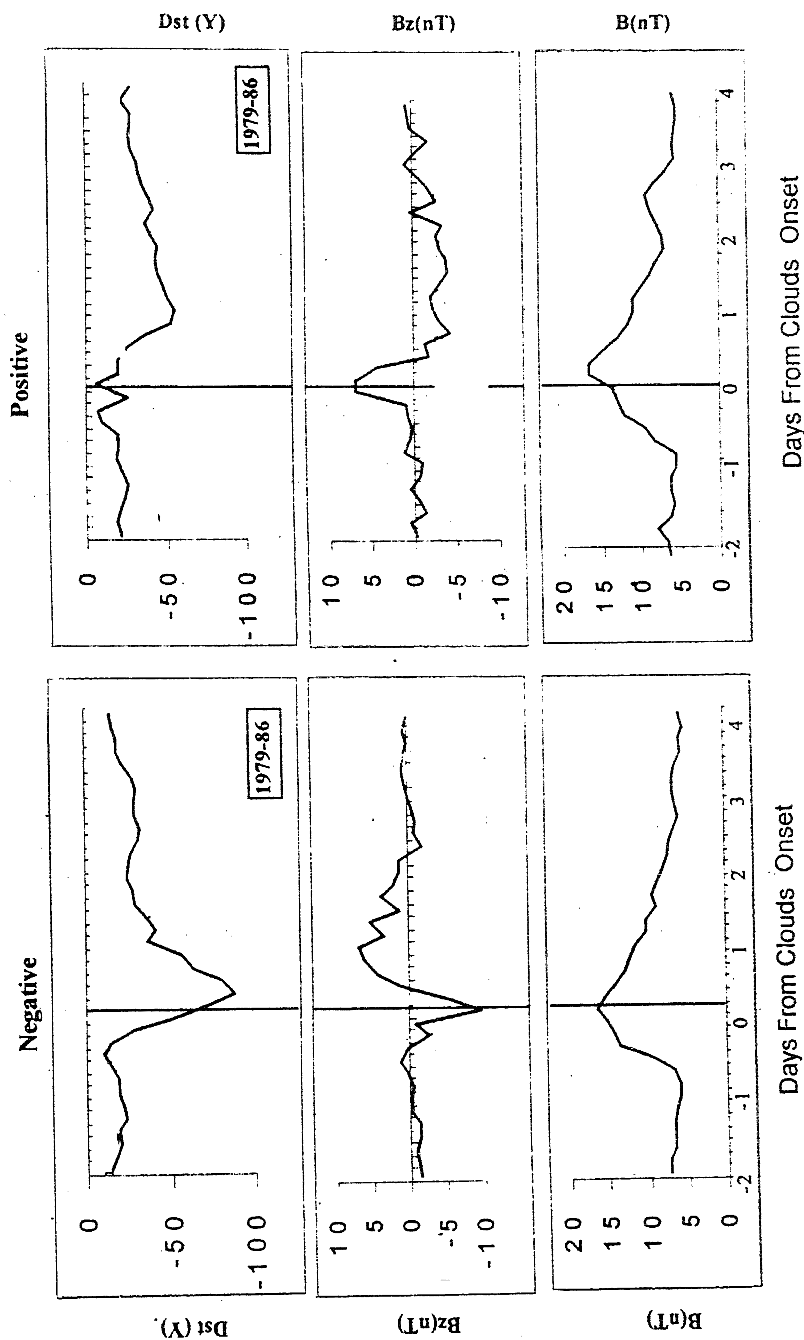
(ii) आन्तर्ग्रहिक क्षेत्र के पार्श्व में सन्निहित मेघ।

(iii) शीत चुम्बकीय वृद्धि से युक्त मेघ।

तदुपरांत अनुसंधानकर्ताओं ने चुम्बकीय क्षेत्र B की दिशा को प्राथमिक आधार मानते हुये 1988 में एक नई वर्गीकरण योजना प्रदान की जिसके अनुसार ऐसा चुम्बकीय मेघ जिसके चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा उपग्रह से संपर्क के समय उत्तर (वामावर्त) की ओर हो तो उसे धनात्मक चुम्बकीय मेघ कहेंगे तथा यदि दिशा दक्षिण (दक्षिणावर्त) की ओर हो तो ऐसा मेघ ऋणात्मक चुम्बकीय मेघ कहलायेगा।[6] अपनी सरल संरचना तथा दीर्घ-कालिक परिवर्तनशील (दक्षिण/उत्तर दिशा में) चुम्बकीय क्षेत्र के कारण सौर-भौमिक अध्ययन के लिये चुम्बकीय मेघ एक आदर्श विषयवस्तु है।[7] जहाँ एक ओर सौर-विज्ञान के लिये उनकी बृहद रज्जु-समान संरचना जिज्ञासा उत्पन्न करती है कि वे सूर्य-पटल पर घटित परिज्वाल द्रव्यमान उत्सर्जन (Control Mass Ejection) की अभिव्यक्ति हैं[8] अथवा लुप्त तंतु (Disppearing Filament) की[9] वहीं दूसरी ओर स्थलीय स्तर पर पृथ्वी का इनके साथ निमीलन होने से एक दीर्घ-कालिक दक्षिणावर्ती चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न होकर शक्तिशाली भूचुम्बकीय झंझावात/तूफान के लिये अनुकूल स्थितियाँ प्रदान करता है।[10] चुम्बकीय मेघों की खोज के पश्चात् से ही विभिन्न आन्तर्ग्रहिक-लक्षणों तथा भूचुम्बकीय घटनाओं के साथ इनके साहचर्य को ज्ञात करने के लिये कई अध्ययन किये गये हैं।[8, 11] प्रस्तुत शोध-पत्र में हम चुम्बकीय मेघों के आन्तर्ग्रहिक लक्षणों तथा भूचुम्बकीय प्रभावों का अध्ययन करेंगे, जिनका उपयोग इनके सौर-कारक, प्रभामण्डलीय, अयनमण्डलीय तथा तापमण्डलीय प्रभावों को समझने में किया जा सकेगा।



चित्र 1: चुम्बकीय मेघों का सौर-पवन के वेग, घनत्व तथा अध्यारोपित काल-खण्ड विश्लेषण के परिणाम प्रदर्शित किये गये हैं। बायीं ओर ऋणात्मक तथा दायीं ओर धनात्मक चुम्बकीय मेघों के परिणाम हैं।



चित्र 2 : चुम्बकीय मेघों का आन्तर्ग्रहिक चुम्बकीय क्षेत्र B, z अक्षीय घटक Bz तथा भूचुम्बकीय सूचकांक Dst के साथ अध्यारोपित कालखंड विश्लेषण के परिणाम दर्शाये गये हैं। बायीं ओर ऋणात्मक तथा दायीं ओर धनात्मक मेघों के परिणाम प्रदर्शित हैं।

प्रयोगात्मक

आँकड़े तथा विश्लेषण-विधि

इस शोध-पत्र में हमने 21 (8 धनात्मक तथा 13 ऋणात्मक) चुम्बकीय मेघों का अध्ययन किया है। अधिकतम और सक्रियता 1979 (21वाँ चक्र) से न्यूनतम सक्रिय अवस्था 1986 (22वाँ चक्र) तक होने वाली इन घटनाओं को छाँटने के लिये हमने पूर्ववर्ती मापदण्ड ही अपनाए हैं।[5] इन मेघों के प्रकट होने की तिथियाँ व समय सारणी 1 में प्रदर्शित हैं। आन्तर्ग्रहिक चुम्बकीय क्षेत्र B, अक्षीय घटक Bz तथा सौर-पवन प्लाज्मा-वेग V, आयन घनत्व Np व ताप Tp के आँकड़े जो IMP-8 तथा ISEE-3 आन्तरिक्ष उपग्रहों द्वारा रिकार्ड किये गये हैं, हमने राष्ट्रीय अंतरिक्ष विज्ञान आँकड़ा केन्द्र, नासा, से प्राप्त किये हैं।[12]

1964 में प्रचलन में लाये गये Dst सूचकांक को जो मुख्यतः पृथ्वी के चारों ओर स्थित वलय-धारा चुम्बकीय क्षेत्र को दर्शाता है, हमने भूचुम्बकीय गतिविधियों को प्रदर्शित करने के लिये प्रयुक्त किया है। इसके आँकड़े हमें भारतीय भूचुम्बकीय संस्थान, मुंबई से प्राप्त हुये हैं। इन मेघों के प्रकट होने की तिथियाँ एवं समय सारणी 1 में प्रदर्शित हैं। अन्तर्निहित प्रभावों को ज्ञात करने के लिये हमने क्री (Chree) की अध्यारोपण-कालखण्ड तिथि (Super posed Epoch Method) का उपयोग किया है। इस सांख्यिकीय प्रणाली द्वारा घटना का पूर्ण अध्ययन करने के लिये हमने घटना से दो दिवस पूर्व तथा चार दिवस उपरांत के समय के साथ-साथ 1979-1986 तक होने वाले समस्त चुम्बकीय-मेघों का चयन किया है।

परिणाम तथा विवेचना

सौर-पवन के कणों के वेग, घनत्व तथा ताप पर चुम्बकीय मेघों का प्रभाव चित्र 1 में प्रदर्शित हैं। X अक्ष पर शून्य मेघ के प्रारंभ (Onset) का द्योतक है। स्पष्ट है कि ऋणात्मक मेघों के लिये वेग का मान सर्वाधिक है, जो पूर्व के ~ 6 घंटों से मेघ के पश्चात् के ~ 12 घंटों तक परिलक्षित है। औसत वेग का मान भी धनात्मक मेघ वाली स्थिति से अधिक है जहाँ प्रारंभिक दिवस से वेग का मान वृद्धि करता हुआ ~ 20 घंटे पश्चात् सर्वाधिक होता है। पुनः ~ 8 घंटे पश्चात् वेग में कमी आने लगती है। धनात्मक मेघों के लिए औसत घनत्व ऋणात्मक घनत्व से अधिक है जहाँ मेघ प्रारंभ होने से ~ 18 घंटे पूर्व सर्वाधिक होकर घटने लगता है तथा पुनः अधिक प्रसरण न होकर लगभग नियत हो जाता है। धनात्मक मेघ घनत्व पर अधिक प्रभाव डालते हैं तथा क्षणिक कंपनों के द्वारा घनत्व उच्च मान पर बना रहता है। ताप पर दोनों का प्रभाव क्षणभंगुर कम्पनों के रूप में है तथापि ऋणात्मक मेघ ताप में अधिक वृद्धि करते हैं। निष्कर्षतः ऋणात्मक मेघ आघात तरंगों से संबद्ध होने के कारण सौर-पवन के वेग पर अधिक प्रभाव डालते हैं। परिणामस्वरूप घनत्व में कमी दृष्टव्य है। ये परिणाम पूर्व के परिणामों से संगत ही हैं तथा स्पष्ट करते हैं कि विभिन्न प्रकार के मेघ अन्तर्ग्रहिक प्रदेश में भिन्न प्रकार की स्थितियाँ निर्मित करते हैं।[9, 11]

सारणी 1 विश्लेषण में प्रयुक्त चुम्बकीय मेघ

ऋणात्मक चुम्बकीय मेघ				धनात्मक चुम्बकीय मेघ			
वर्ष	माह	दिनांक	समय (U.T)	वर्ष	माह	दिनांक	समय (U.T)
1979	अप्रैल	03	2200	1979	दिसम्बर	03	1100
1979	सितम्बर	18	0800	1980	मार्च	19	1600
1980	फरवरी	16	0400	1982	फरवरी	12	0300
1980	दिसम्बर	11	2300	1982	सितम्बर	25	2200
1980	दिसम्बर	19	1400	1983	अक्टूबर	04	0300
1981	फरवरी	06	1900	1986	जून	27	0800
1981	मार्च	05	1300	1986	जुलाई	25	0200
1983	सितम्बर	24	1200	1986	अगस्त	21	0100
1983	मई	24	1200				
1984	दिसम्बर	30	0100				
1984	जून	01	0900				
1984	अगस्त	13	0100				
1985	सितम्बर	19	0200				

दूसरे चित्र में आन्तर्ग्रहिक क्षेत्र B तथा इसका z-अक्ष में घटक Bz क्रमशः पहले तथा दूसरे पैनल में प्रदर्शित है। भू-चुम्बकीय सूचकांक तृतीय पैनल में दिखाया गया है। दोनों प्रकार के मेघों के लिये B का मान अधिक है यद्यपि धनात्मक के लिये शिखर मान 6 घंटे पश्चात् प्राप्त होता है। ऋणात्मक मेघों के लिये Bz स्पष्टतः और अधिक दक्षिणावर्ती मेघ प्रारंभ होने पर अंशतः दक्षिणावर्ती हो जाता है। दोनों प्रकार के मेघों के लिये परिणामों में भिन्नता है। ऋणात्मक मेघ Dst सूचकांक के मान का –80 nT कम कर देते हैं जो स्थलीय वलय धारा चुम्बकीय क्षेत्र में विशेष परिवर्तनों का द्योतक है। स्पष्ट है कि ऋणात्मक मेघ, धनात्मक मेघों की तुलना में कहीं अधिक शक्तिशाली भूचुम्बकीय तूफान/झंझावात उत्पन्न करते हैं। यहाँ हम भौतिकी के शब्दों में कह सकते हैं कि ऋणात्मक मेघ अधिक

शक्तिशाली आघात तरंगों से निमीलित होकर सौर-पवन के वेग में वृद्धि कर अधिक शक्ति से Bz घटक को प्रसरण प्रदान करते हैं जिसके परिणामस्वरूप पृथ्वी के निकट भूचुम्बकीय क्षेत्र तदनुरूप होकर युग्मन के द्वारा सौर पवन के आवेशित कणों, द्रव्यमान, ऊर्जा को प्रवेश करने का अवसर प्रदान करते हैं तथा संक्षुब्ध झंझावात इत्यादि इसी युग्मन का परिणाम है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक अमूल्य सुझावों के लिये प्रो० रामस्वरूप व प्रो० राजकिशोर तिवारी के आभारी हैं। सुभाष चन्द्र कौशिक टीचर-फेलेशिप के लिये विश्वविद्यालय अनुदान आयोग, सी० आर० ओ०, भोपाल के प्रति कृतज्ञ है।

निर्देश

1. पार्कर, ई० एन० : एस्ट्रोफिजिक्स जर्न०, 1958, 128, 664

2. हण्डहॉजन, ए० जे० : ऐन इण्टरप्लेनेटरी व्यू आफ कॉरोनल होल्स एण्ड हाइस्पीड विंड स्ट्रीमस, संपा० जे० बी० जिरकट, कॉलोरेडो एसोशिऐटेड प्रेस, 1977, पृष्ठ 225-229

3. फेल्डमैन, डब्ल्यू० सी०, एल्ब्रिज, जे० आर०, बामे, एस० जे०, मांटेगोमरी, एम० डी० तथा ग्रे, एस० पी० : जर्न० जियोफिजिकल रिसर्च, 1975, 80, 4181

4. बरलगा, एल० एफ०, सिट्लर, एम०, मरियानी, एफ० तथा स्वैन, आर० : वही, 1981, 86, 6673

5. क्लाइन, एल० डब्ल्यू० तथा बरलगा, एल० एफ० : वही, 1982, 87, 613

6. झांग, जी० तथा बरलगा, एल० एफ० : वही, 1988, 93, 2511

7. गोस्लिंग, जे० टी० : फिजिक्स ऑफ मैग्नेटिक फ्लक्स रोप्स, जियोफिजि० मोनोग्रर० सर०, ए० जी० यू० वाशिंगटन डी० सी०, 1990, 58, 543

8. बरलगा, एल० एफ० : सोलर फिजिक्स, 1982, 81, 181

9. विलसन, आर० एम० तथा हील्डनर, ई० : वही, 1984, 91, 169

10. विलसन, आर० एम० : प्लेनेट० स्पेस साइंस, 1987, 35, 329

11. कौशिक, एस० सी० तथा श्रीवास्तव, पी० के० : बुलेटिन एस्ट्रो० सोसा० इण्डिया, 1999, 27, 85

12. किंग, जे० एच० : इम्टरप्लेनेटरी मीडि० डाटा बुक, एन० एस० एस० डी० सी०/डब्ल्यू० डी० सी०-ए०, गोडार्ड स्पेस फ्लाइट सेंटर, ग्रीनबेल्ट, 1986

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 3, July, 1999.

आभासी संमित तथा आभासी द्वि-संमित फिन्सलर समष्टि

सर्वेश तिवारी

बांकुइया रोड, ढेखा, रीवॉं (म. प्र.)

[प्राप्त - मार्च 11,1998]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में आभासी संमित तथा आभासी द्वि-संमित फिन्सलर समष्टि के लिए प्रतिबन्ध का निगमन किया गया है।

Abstract

Pseudo symmetric and pseudo bi-symmetric Finsler space. *By* Sarvesh Tiwari, Bankuiya Road, Dhekha-Rewa (M. P.)

In the present paper a condition for a pseudo symmetric and pseudo bi-symmetric Finsler space has been deduced.

1. आभासी संमित समष्टि

1.1 परिभाषा

फिन्सलर समष्टि जिसमें आभासी वक्रता टेंसर T लुप्तमान सहपरिवर्ती अवकलज वाला हो, आभासी संमित फिन्सलर समष्टि कहलावेगा।

इस तरह आभासी संमित फिन्सलर समष्टि के लिए

(a) $$\beta_i T^i_{hjk} = 0. \tag{1.1}$$

1.1 **प्रमेय**-सपाट समष्टि स्पष्टतः आभासी संमित होता है। (1.1) के क्रमागत ट्रांसवेक्शनों $\dot{X}^j$ तथा $\dot{X}^h$ से प्राप्त होंगे-

$$\beta_1 T^i_{hk} = 0, \tag{1.2a}$$

$$\beta_1 T^i_k = 0. \tag{1.2b}$$

i तथा k के प्रति (1.2b) के संकुचन से निम्न की प्राप्ति होगी

$$\beta_1 T = 0. \tag{1.3}$$

आभासी संमित फिन्सलर समष्टि में और आगे परिणामों के लिए हम समीकरण (1.1) को $\beta_1 \partial h\, T^i_{JK} = 0$ के रूप में पुनः लिखते हैं। क्रम विनिमय रूप व्यवहृत करने पर

$$\partial h\ \beta_1 \lambda^i - \beta_1 \partial h \lambda^i = G^i_{hlm} \lambda^m, \tag{1.4}$$

उपर्युक्त समीकरण (1.2a) के फलस्वरूप

$$T^i_{jm} G^m_{hlk} + T^i_{mk} G^m_{nlj} - T^m_{jk} G^2_{hlm} = 0 \tag{1.5}$$

में समानीत हो जाता है। हम कह सकते है कि-

प्रमेय 1.2 : आभासी संमित फिन्सलर समष्टि आवश्यक रूप से (1.3) को ग्रहण करता है। तत्पश्चात् कल्पना करें कि फिन्सलर समष्टि (1.2) को ग्रहण करता है। इसे X^J के प्रति अवकलित करने पर

$$\partial j\ \beta_l T^i_{hk} = \beta_l T^i_{jhk} + G^i_{jlm} T^m_{hk} - G^m_{jlk} T^i_{hm} - G^m_{jlm} \tag{1.6}$$

यदि हम इस समीकरण में यह कल्पना करें कि विचाराधीन समष्टि आभासी संमित है तो

$$G^i_{jlm} T^m_{hk} = G^m_{jlh} T^i_{mk} - G^m_{jlk} T^i_{nm} = 0 \tag{1.7}$$

इस समीकरण से यह निकलता है कि (1.5) द्वारा व्यक्त प्रतिबन्ध (1.2a) ग्राहक समष्टि को आभासी संमित समष्टि बनाने के लिए पर्याप्त है। इस प्रकार हम कह सकते हैं -

प्रमेय 1.3 : यदि एक (1.2a) ग्राहक समष्टि (1.5) को भी ग्रहण करे तो यह आभासी संमित बन जाती है।

2. आभासी-द्वि-संमित फिन्सलर समष्टि

2.1 परिभाषा

फिन्सलर समष्टि आभासी द्वि संमित कहलावेगा यदि आभासी वक्रता टेंसर क्षेत्र निम्न की तुष्टि करे।

$$\beta_{\perp}\beta_m \; T^i_{jkh} = 0 \tag{2.1}$$

चूँकि सपाट समष्टि शून्य वक्रता का है इसलिए यह (1.1) तथा (2.1) को भी ग्रहण करता है। फलस्वरूप हमें समष्टि का ऐसा उदाहरण प्राप्त होता है जो संमित है और द्वि संमित भी। इस तरह हम कह सकते हैं -

प्रमेय 2.1

सपाट समष्टि आभासी द्विसंमित है। (1.1) को बरवाल्ड के अर्थ में अवकलन करने पर

$$\beta_{\perp}\beta_m \; T^i_{jkh} = \partial_{\perp} G_m \; T^i_{jkh} - \left(\dot{\partial}_p \beta_m \; T^i_{jkh}\right) G^p_l + \beta_m T^p_{jkh} G^i_{pl} - \beta_m T^i_{pkh} G^i_{pl}$$

$$- \beta_m T^i_{pkh} G^p_{kl} - \beta_m T^i_{jph} G^p_{kl} - \beta_m T^i_{jkp} G^p_{hl} - \beta_p T^i_{jkh} G^p_{ml} . \tag{2.2}$$

यदि अब हम कल्पना करें कि विचाराधीन समष्टि आभासी संमित है तो इस कल्पना से तुरन्त यह परिणाम निकलेगा

$$\beta_{\perp}\beta_m \; T^i_{jkh} = 0 \tag{2.3}$$

इस तरह हम कह सकते हैं -

प्रमेय 2.2

प्रत्येक आभासी संमित F_n आभासी द्वि संमित है।

क्रमगत रूप से $X^{\cdot k}$ तथा $X^{\cdot J}$ के द्वारा ट्रांसवेक्शन (2.1) एवं समीकरण (2.1b) $T_{hj\cdot k}^{\cdot J} X^{\cdot J} = T_{hk}^{\;\;i}$ एवं (2.1b) $T_{hk}^{\;\;i} X^{\cdot h} = T_k^{\;i}$ पर ध्यान देने पर

$$\beta_l\ \beta_m\ T^i_{jh} = 0 \tag{2.4}$$

तथा

$$\beta_l\ \beta_m\ T^i_h = 0 \tag{2.5}$$

i तथा h घातांकों के प्रति (2.5) को संकुचन करने तथा $T^i_j = (n=1)\,T$ पर ध्यान देने पर हम पाते हैं

$$\beta_l\ \beta_m\ T = 0 \tag{2.6}$$

अब (2.6) के प्रति संमित अंश को l, m घातांकों के प्रति विचार करने तथा क्रमविनिमय सूत्र $\beta_h\ \beta_k T - \beta_k\, \beta_h\, T = -\,\dot{\partial} i\, TH^i_{hk}$, का व्यवहार करने पर

$$(\dot{\partial}_i T)\ H^i_l = 0 \tag{2.7}$$

मिलता है। (2.7) के साथ ट्रांसवेक्शन से

$$(\dot{\partial}_i T)\ H^i_l = 0 \tag{2.8}$$

प्रदान करता है। इस तरह

प्रमेय 2.3 : आभासी द्वि संमित समष्टि में विचलन टेंसर वेक्टर क्षेत्र $(\dot{\partial}_i T)$ पर लाम्बिक होता है

$$g_{il}\ T^i_{hjk} \underline{\underline{\mathrm{def}}}\ T_{lhjk} \tag{2.9}$$

तथा T_{lhjk} को सहयोगी आभासी वक्रता टेंसर कहेंगे।

(2.9) को सहपरिवर्ती रूप से अवकलित करने पर

$$\beta_p\, T_{lhjk} = \left(\beta_p\, g_{il}\right) T^i_{hjk} + g_{il}\left(\beta_p\, T^i_{hjk}\right) \tag{2.10}$$

पुनः (2.10) को सहपरिवर्ती रीति से अवकलित करने पर

$$\beta_q \beta_p T_{lhjk} = \left(\beta_p \beta_q\right) g_{il} T^i_{hjk} + \left(\beta_p g_{il}\right)\left(\beta_q T^i_{hjk}\right) + \left(\beta_q g_{il}\right)\beta_p T^i_{hjk} + g_{il}\beta_q \beta_p T^i_{hjk} \quad (2.11)$$

यदि इस अवस्था में हम विचाराधीन समष्टि को आभासी संमित मानें तो (2.11) तुरन्त देता है-

$$\beta_q \beta_p \ T_{lhjk} = \left(\beta_q \beta_p g_{il}\right) T^i_{hjk} + g_{il}\beta_q \beta_p T^i_{hjk} \quad (2.11)$$

इस तरह हम कह सकते हैं कि

प्रमेय 2.4

आभासी संमित समष्टि में सहयोगी आभासी वक्रता टेंसर (2.11) को तुष्ट करता है। चूँकि प्रत्येक आभासी संमित समष्टि आभासी द्वि संमित है तो

$$\beta_q \beta_p \ T_{lhjk} = \left(\beta_q \beta_p g_{il}\right) T^i_{hjk} \quad (2.12)$$

प्रदान करता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं -

प्रमेय 2.5

एक ऐसे आभासी संमित समष्टि में, जो द्वि संमित भी है सहयोगी आभासी वक्रता टेंसर (2.12) को भी तुष्ट करता है

यदि हम मान लें कि विचाराधीन समष्टि इस तरह सम्बद्ध है जहाँ मीटरी टेंसर का लोपायमान सहपरिवर्ती अवकलज है, तो (2.11) के दाहिने पक्ष के सारे सदस्य लुप्त हो जाते हैं और हमें

$$\beta_q \beta_p \ T_{lhjk} = 0 \quad (2.13)$$

प्राप्त होता है।

इस तरह हम कह सकते हैं -

प्रमेय 2.6

आभासी द्वि संमित समष्टि में सहयोगी आभासी वक्रता में लोपायमान द्वितीय कोटिक सहपरिवर्ती

अवकलन नहीं होता। बहुविध ग्राहक (2.4) पर विचार करते हैं। अब हम एक T^i_{jh} द्वि संमित बहुविध ग्राहक (2.4) पर विचार करते हैं

$$\beta_h\left(\dot{\partial}_k T^i_j\right) - \dot{\partial}_k\left(\beta_h T^i_j\right) = T^i_r G^r_{jkh} - T^i_{rkh}$$

टेन्सरफील्ड $B_m \cdot T^i_{jh}$ का व्यवहार करने पर (2.4) को $X^{\cdot k}$ के प्रति अंशतः अवकलित करने तथा क्रम विनिमय सूत्र -

$$\beta_l\left(\dot{\partial}h\,\beta_m T^i_{jk}\right) + \beta_m T^p_{jk}\,G^i_{hlp} - \beta_m T^i_{pk}\,G^p_{hij} - \beta_m T^i_{jp}\,G^p_{hlk} - \beta_p\,G^p_{hlm} \qquad (2.14)$$

पुनः क्रमविनिमय सूत्र (2.14) को व्यवहृत करने पर, किन्तु टेंसर H^L_{jk} को छोड़कर तथा सम्बन्ध (2.1a) का प्रयोग करने पर उपर्युक्त तत्समक

$$\beta_l\beta_m T^i_{jkh} + \left(\beta_l G^l_{hmp}\right)T^p_{jk} + \beta_l G^p_{hmj} T^i_{kp} - \beta_l G^p_{hnk} T^i_{jp}$$

$$+ G^i_{hmp}\beta_l T^p_{jk} + \beta_l T^i_{pj} G^p_{khm} - \beta_l T^i_{pk} G^p_{jhm} \qquad (2.15)$$

में बदल जाता है।

इस तरह (2.14) से यह निकलता है -

$$\left(\beta_l T^p_{jk}\right)G^i_{hmp} + \beta_l T^i_{pj} G^p_{khm} - T^i_{pk} G^p_{jhm} - \beta_p T^i_{jk} G^p_{hlm}$$

$$+ \beta_p T^i_{jk} G^p_h + \beta_m T^p_{jk} G^i_{hlp} + \beta_m T^i_{pj} G^p_{hlp} + \beta_m T^i_{pk} G^p_{jhl}$$

$$+ T^i_{pj}\beta_l G^p_{khm} - T^i_{pk}\beta_l G^p_{jhm} = 0 \qquad (2.16)$$

(2.1) के ग्रहण करने के लिए एक आभासी द्वि संमित समष्टि के लिए आवश्यक शर्त है। (2.16) द्वारा दी गई शर्त भी पर्याप्त होगी।

निर्देश

कार्तां, ई. : C.R. Acad. Sci. Paris, 1933, 196, 582-586.

चाकी, एम. सी. तथा राय चौधरी ए. एन. : J. Ind. Maths. Soc. 1967, 19(2). 279-287

हेल्गासन, एस. : Differential Geometry and Symmetric Space. एकेडमिक प्रेस, 1962

कुमार, ए. : On special Projective Tensor Field. Series (VII) Vol. 8 face 2 (1975) pp. 184-189.

मेहेर, एफ. एम. : Certain Investigations in Finsler Space, पी.-एच. डी थीसिस, बरहामपुर यूनिवर्सिटी 1972

मिश्रा आर. बी. : Math. Z. 1972, 126, 143-153.

मिश्रा, आर. बी. : Tensor (N. S.) 1972, 24, 246-350.

रुण्ड, एच. : The Differential Geometry of Finsler Spaces, Springerverlag, 1959.

यानो, के. : The Theory of Lie Derivatives and its applications, North Holland Publishing Co. Amsterdam 1957.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No.3, July, 1999.

बछड़े की खाल से फोटोग्राफिक जिलेटिन का निर्माण तथा उसके गुण

महेश कुमार शर्मा

यंत्र अनुसंधान एवं विकास संस्थान, देहरादून (उ० प्र०)

[प्राप्त-जुलाई 1, 1999]

सारांश

प्रकाश सुग्राही पायसों को बनाने के लिए फोटोग्राफिक जिलेटिन एक महत्वपूर्ण संघटक है। बछड़े की खाल से फोटोग्राफीय जिलेटिन के निर्माण की तकनीक विकसित की गई है। इस स्वदेशी जिलेटिन के गुण सन्तोषजनक पाये गये हैं और वे विदेशी नमूनों के समकक्ष हैं।

Abstract

Preparation and properties of photographic gelatin from calf hide. *By* Mahesh Kumar Sharma, Instruments Research and Development Estblishment, Dehra Dun (U. P.)

Photographic gelatin forms an indispensable ingredient in the making of photosensitive emulsions. A technical know-how for the preparation of photographic gelatin from calf hide has been developed. The properties of indigenously made gelatin are satisfactory and comparable to imported samples.

आधुनिक फोटोग्राफिक पायसों के निर्माण में फोटोग्राफिक जिलेटिन एक महत्वपूर्ण अवयव है। इन पायसों में संरक्षी कोलॉइड जिलेटिन के विलयन में सिल्वर हेलाइड निलम्बित रहते हैं [1, 2]। उत्तम गुणता के फोटोग्राफीय जिलेटिन में जो गुण होने चाहिए वे इस प्रकार हैं :

(अ) पायस के गुण जिलेटिन में भली प्रकार से निलंबित रहने चाहिए ताकि इनका गुच्छन न हो और फोटोग्राफिक प्रतिबिम्ब में अनुरागी कणिकता न हो,

(ब) जिलेटिन के कारण पायस के कणों में अनावश्यक फोटोग्राफीय प्रभाव न पड़े,

(स) जिलेटिन स्थायी होनी चाहिए ताकि अपरिवर्तित और संसाधित दोनों प्रकार के पायस स्थायी रह सकें तथा

(द) पायस की शक्ति, कठोरपन अथवा स्थायित्व का ह्रास हुए बिना संसाधन विलयन जिलेटिन में से प्रवेश कर सकें[3, 4]।

कोलैजन का प्रथम जल-अपघटनी उत्पाद जिलेटिन है। कोलैजन खाल का मांसल पदार्थ है जिसमें प्रोटीनमय रेशे होते हैं जो लम्बी अणु शृंखलाओं से बने होते हैं। ये जल-अपघटन के पश्चात् जिलेटिन की छोटी शृंखलाओं में टूट जाते हैं[5]।

फोटोग्राफिक जिलेटिन की मुख्य आवश्यकता इसकी शुद्धता है। यह निलंबित तथा चिकने पदार्थों, निम्नकोटिकृत उपपादों, मिलावटी पदार्थों तथा कठोर कारकों से मुक्त होनी चाहिए और इसमें अत्यधिक अम्लता या क्षारता नहीं होनी चाहिए[6]। आसंजक पर ब्रिटिश रिसर्च कमेटी की रिपोर्ट और अन्य शोध-कर्ताओं[7-9]के अध्ययन के अनुसार उत्तम फोटोग्राफिक जिलेटिन का राख अंश 2 प्रतिशत से अधिक नहीं होना चाहिए तथा जल अवशोषण की क्षमता अपने भार से 5-10 गुनी, और आर्द्रता सीमा 8 से 15 प्रतिशत तक होनी चाहिए। आर्द्रता का प्रतिशत अधिक होने पर इसकी निधानी आयु कम हो जाती है और आर्द्रता प्रतिशत कम होने पर अधिक शुष्क जिलेटिन प्राप्त होता है जिसमें अल्प फूलने के गुण होते हैं। साथ ही अमोनिकल सिल्वर नाइट्रेट को 12 घंटे तक अंधेरे कमरे में जिलेटिन को अपचित नहीं करना चाहिए। जिलेटिन घोल की श्यानता तथा हिमांक भी बहुत महत्वपूर्ण हैं क्योंकि ये गुणधर्म न केवल पायसों के बनाने में अपना प्रभाव डालते हैं अपितु विलेपन, विस्तारण और जमने की संक्रियाओं को भी नियंत्रित करते हैं।

विभिन्न जानवरों की खालों के अध्ययन[10, 11] से पता चला है कि बछड़े की खाल की चुनी हुई कतरनें, कान, गालों के टुकड़े और मस्तक का भाग फोटोग्राफिक जिलेटिन बनाने के लिए उत्तम है। कच्चे माल में अच्छी संरचनात्मक गुणता होनी चाहिए तथा यह बैक्टीरिया संदूषण से मुक्त होना चाहिए। उच्च वसा युक्त खाल ठीक नहीं होती है क्योंकि इनसे बने जिलेटिन द्वारा फिल्म विलेपन के समय चित्ते आ जाते हैं[12]।

प्रकाशित जानकारी न होने के कारण, फोटोग्राफीय जिलेटिन के निर्माण की वास्तविक तकनीक उपलब्ध नहीं है। भारत में कोई भी कम्पनी बछड़े की खाल से फोटोग्राफिक जिलेटिन नहीं बनाती है। इस अनुसंधान में बछड़े की खाल से फोटोग्राफिक जिलेटिन बनाने की प्राविधिक जानकारी विकसित की गई है और साथ ही सुग्राही पायस को बनाने में इसका प्रयोग किया गया है।

प्रयोगात्मक

निर्माण की विधि

बछड़े की खाल से फोटोग्राफिक जिलेटिन के निर्माण की तकनीक संक्षेप में चित्र 1 में दर्शाई गई है। स्थानीय चमड़े के कारखाने से उपलब्ध बछड़े की अपक्क खालों को नल के चलते पानी से 24 घंटे से अधिक समय तक अच्छी तरह धोया गया ताकि इसमें से गन्दगी, अबद्ध मांस और रक्त (खून) को दूर किया जा सके। इस अपक्क खाल से जिलेटिन निकालने के लिए निम्नलिखित संक्रियाएँ इस्तेमाल की गईं।

चूना उपचार (Liming)

इस प्रक्रिया से कुछ अश्लेषी घटक दूर हो जाते हैं, चर्बीदार पदार्थ सैपोनिकृत हो जाते हैं और इससे कोलैजन रेशे महीन तंतुओं में मुक्त हो जाते हैं जिससे जिलेटिन पृथक होकर गर्म पानी में घुल जाता है। इस चूना उपचार विधि में अपक्क खाल को बड़ी-बड़ी इनैमल की तश्तरियों में रख कर लोहे तथा मैंगनीज से मुक्त चूने के घोल में डुबाया गया। खाल को बारम्बार ऊपर-नीचे किया गया ताकि चूने के घोल का असर खाल की पूरी सतह पर ठीक प्रकार से हो सके। चूने के घोल को कई बार बदला गया और खाल की दशा देखकर यह प्रक्रिया 5 से 10 दिनों तक की जारी रखी गई। प्रयोग में लाई गई चूने की कुल मात्रा खाल के भार पर निर्भर पाई गई जो उसके भार का 6 से 9 प्रतिशत तक हो सकती है। यह प्रक्रिया तब तक की गई जब तक खाल फूल नहीं गई और चिकनाई से मुक्त नहीं हो गई। कास्टिक सोडा के इस्तेमाल से इस चूना उपचार कार्यविधि का समय कम किया जा सकता है। इस प्रक्रिया के ताप को 20° सें. से अधिक बढ़ने नहीं दिया गया। उच्च ताप पर उपलब्ध जिलेटिन सुग्राही पायस बनाता है जिससे धूमिलता उत्पन्न होती है। इस पूरी प्रक्रिया को सावधानी से नियंत्रित किया गया ताकि जीवाणु उत्पन्न न हो सकें।

चूना हटाना (Deliming)

चूने से उपचारित खाल को चूना रहित किया गया ताकि अतिरिक्त चूने और अन्य गन्दे पदार्थों को दूर किया जा सके अन्यथा जिलेटिन की गुणता व उत्पादन इससे प्रभावित हो जाते हैं। इस कार्यविधि में सबसे पहले नल के चलते पानी से खाल को खूब अच्छी तरह से धोया गया जब तक कि धावन जल साफ न हो जाये और फीनॉलफ्थेलिन से परीक्षण करने पर हल्का रंग न दे। धावन बहुत अधिक देर तक नहीं किया गया क्योंकि इससे जिलेटिन का जल-अपघटन हो जाता है। धोने के लिये काम में लाये जाने वाले जल में 145-215 मि० ग्रा० प्रति लीटर से अधिक कैल्सियम तथा मैग्नीशियम के लवण नहीं होने चाहिए और यह जल लोहा, हाइड्रोजन सल्फाइड, सोडियम कार्बोनेट, क्लोराइट, अमोनिया, फफूंदी तथा बैक्टीरिया से मुक्त होना चाहिए।

क्षार के अवशेष को दूर करने के लिए अपक्क खाल को 2 प्रतिशत हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से धोया

गया। इस अम्ल में लोहे व आर्सेनिक की बहुत कम मात्रा नहीं होनी चाहिए। अम्ल से मुक्त करने के लिए इसे ठंडे जल से धोया गया। धावन जल का लिटमस पेपर से परीक्षण किया गया ताकि यह पता चल सके कि अम्ल पूरी तरह से दूर हो गया या नहीं। अन्त में खाल को ठंडे आसुत जल से धोया गया।

निस्सारण (Extraction)

खाल को छोटे-छोटे टुकड़ों में काटा गया ताकि इसकी अधिक सतह खुली रहे तथा फिर इन्हें ताप-स्थैतिक नियंत्रित जल-ऊष्मक में रखे हुए स्टेनलेस स्टील के बर्तनों में तीन गुने भार के आसुत जल के साथ 50-55° से० ताप पर पकाया गया। जब पानी की मात्रा कम होकर लगभग आधी रह गयी तो इसे निथार लिया गया और ताजा आसुत जल मिलाया गया। इस प्रक्रिया को दोहराया गया। इस प्रकार चार सारसत्त एकत्रित किये गये। अन्तिम दो का थोड़े ऊंचे ताप पर निस्सारण किया गया। इस पूर्ण संक्रिया में लगभग 10 घंटे लगे।

पहले दो सारसत्त काफी साफ थे, परन्तु तीसरे व चौथे सारसत्त गहरे रंग के थे। इन द्रवों के सांद्रण से पता चला कि जिलेटिन का निस्सारण पहले तीन निस्सारण में लगभग पूरा हो गया था। चौथे सारसत्त में जिलेटिन बहुत कम मात्रा में था और इसमें काला उत्पाद मिला। इसे फेंक दिया गया। निस्सारण के दौरान बचे हुए पदार्थ को उर्वरक की तरह इस्तेमाल किया जा सकता है।

निर्मलीकरण (Clarification)

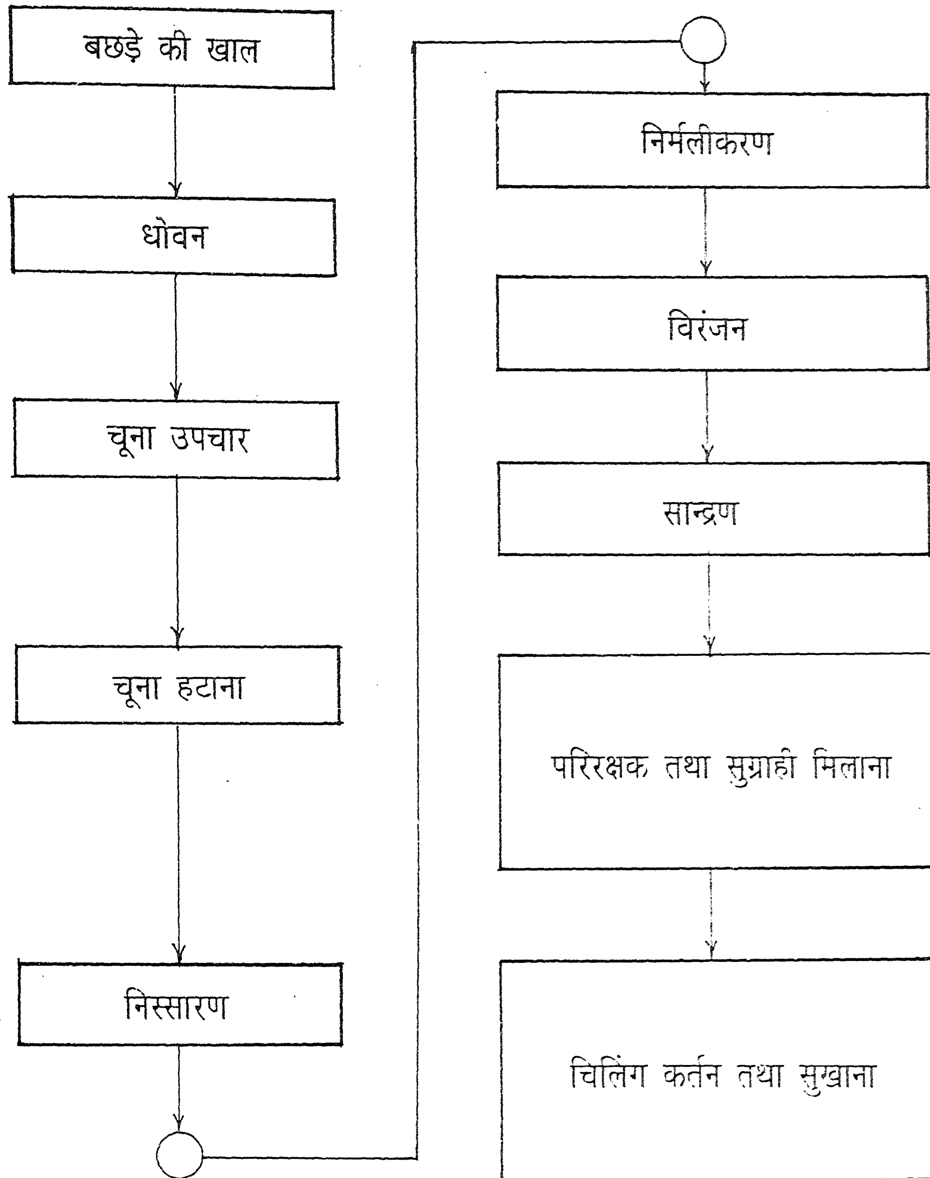
पहले तीन सारसत्त को आपस में मिलाया गया तथा इसे स्वच्छ किया गया ताकि अघुलनशील कार्बनिक पदार्थ, एल्बूमिन, म्यूसिन, चूना-साबुन तथा खनिज कणों को दूर किया जा सके। भारी कण सादित होकर पहले पृथक हो गये और आंशिक रूप से स्वच्छ द्रव को निथार लिया गया। इस द्रव को कांच की रुई तथा कपास की वैकल्पिक परतों से बने फिल्टर बेड द्वारा फिल्टर किया गया और फिर निलंबित अशुद्धियों को दूर करने के लिए अपकेन्द्रण किया गया।

विरंजन (Bleaching)

निर्मलीकरण के बाद घोल में अभी भी पीलापन था। इसका विरंजन करने के लिए इसमें से सल्फर डाइ ऑक्साइड गैस लगभग आधे घंटे तक धीमी गति से (एक बुलबुला प्रति सेकन्ड) प्रवाहित की गई।

सांद्रण (Concentration)

विरंजित द्रव को ताप-स्थैतिक जल-ऊष्मक (45-50° से०) में रखे स्टेनलेस स्टील बर्तनों में सांद्रित किया गया, जब तक कि इसकी सान्द्रता 20-22 प्रतिशत नहीं हो गई। सांद्रित द्रव का ph 5 से 7 के मध्य पाया गया।



चित्र 1. बछड़े की खाल से फोटोग्राफिक जिलेटिन के निर्माण की तकनीक

सारणी 1

स्वदेशी तथा विदेशी जिलेटिन के फोटोग्राफिक गुणधर्म

No.	गुण	स्वदेशी जिलेटिन	विदेशी जिलेटिन
1.	जेली व घोल का रंग	बहुत हल्का पीला	लगभग रंगहीन
2.	चिकनाई	उपेक्षणीय	उपेक्षणीय
3.	फॉर्मेल्डीहाइड	बिल्कुल नहीं	बिल्कुल नहीं
4.	आर्सेनिक (गुटजाइट परीक्षण)	बिल्कुल नहीं	बिल्कुल नहीं
5.	फ्लोरिन (स्टूआर्ट, डाहले तथा फ्रे विधि)	0.05 %	0.03 %
6.	भारी धातु (लेड, कॉपर, तथा जिंक : विचमैन विधि)	बिल्कुल नहीं	बिल्कुल नहीं
7.	सल्फर यौगिक (लूथर विधि)	सकारात्मक	सकारात्मक
8.	राख अंश	2.34 %	1.98 %
9.	आर्द्रता अंश (22° से० पर)	12.23 %	11.02 %
10.	5 % घोल का पी-एच.	6.2	7.2. %
11.	10 % घोल का हिमांक	18° से०	16° से०
12.	10 % घोल का गलनांक	22° से०	20° से०
13.	22° से० पर 5%घोल की श्यानता (जल की श्यानता 1 की तुलना में)	3.68	3.24
14.	जल अवशोषण (अपने भार का गुना)	13.17	10.46
15.	2% घोल को समान आयतन के 10 % अमनोनिकल सिल्वर नाइट्रेट के साथ मिलाने पर	तलछट या कालापन नहीं	तलछट या कालापन नहीं

परिरक्षक और सुग्राहक मिलाना (Addition of Preservative and Sensitizer)

फफूंदी तथा बैक्टीरिया की उत्पत्ति को रोकने के लिए तथा अन्तिम उत्पाद को सुग्राहिता प्रदान करने के लिए प्रति लीटर सांद्रित द्रव में एक मिलिलीटर फिनॉल (परिरक्षक) और एक मिलिलीटर 5 प्रतिशत अमोनियम थायोसल्फेट घोल (सुग्राहक) मिलाया गया। इन पदार्थों को सांद्रित द्रव में बहुत अच्छी तरह विलोड़ित किया गया।

द्रुतशीतन, कर्तन तथा शुष्कण (Chilling, Cutting and Drying)

द्रव को स्टेनलेस स्टील की तश्तरी में डाल कर रेफ्रिजेरेटर में रात भर रखा गया। यह ठोस द्रव्यमान के रूप में जम गया। इसे स्टेनलेस स्टील चाकू से छोटे-छोटे टुकड़ों में काटा गया। इन टुकड़ों को विद्युत पंखे की हवा से सावधानी से सुखाया गया और ताप को 20° से० से अधिक नहीं बढ़ने दिया गया। लगभग 10 घंटे में ये पूर्णतः सूख गये। सूखने की संक्रिया सावधानी से नियंत्रित की गई क्योंकि धीमे गर्म करके सुखाने से जल-अपघटन और सूक्ष्मजीवी उत्पत्ति होती है जबकि अधिक देर तक गर्मी के प्रभाव से उत्पाद की श्लिषीय शक्ति क्षीण हो जाती है। जिलेटिन को सुखाकर खरल मे पीसा गया ताकि इसे 10-जाली की छलनी में से गुजारा जा सके।

उत्पादन (Yield)

ऊपरलिखित प्रक्रम के अनुसार, फोटोग्राफिक जिलेटिन बनाने के लिए कुछ प्रयोग किये गये और यह पाया गया कि बछड़े की खाल के भार का लगभग 15 प्रतिशत जिलेटिन प्राप्त हुआ।

परिणाम तथा विवेचना

जॉर्ज नेल्सन डेल एण्ड कम्पनी, लिमिटेड, इंग्लैंड द्वारा प्राप्त किया गया विदेशी फोटोग्राफिक जिलेटिन और स्वयं निर्मित देशी जिलेटिन के कुछ भौतिक तथा रासायनिक गुणों का अध्ययन किया गया। सारणी-1 में इन गुणों के परिणामों को दर्शाया गया है तथा यह पाया गया कि स्वदेशी उत्पाद विदेशी नमूने के तुल्य है।

प्रकाश सुग्राही पायस बनाने के लिए स्वदेशी फोटोग्राफिक जिलेटिन का प्रयोग किया गया। इस जिलेटिन से एक्स-रे प्रकाश सुग्राही पायस बनाया गया जिसे नीली सेल्यूलोस ट्राइएसिटेट बेस फिल्म के दोनों ओर विलेपित किया गया। इस विलेपित फिल्म का परीक्षण धूमिलता, विपर्यास तथा सुग्राहिता गुणों के लिए और डेवेलपमेन्ट, फिसिंग धावन तथा शुष्कन संक्रियाओं के दौरान इसके व्यवहार के बारे में किया गया। ये परिणाम पूर्ण रूप से सन्तोषजनक पाये गये और विदेशी फोटोग्राफिक जिलेटिन से बनी एक्स-रे फिल्म के समान थे।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक, यंत्र अनुसंधान एवं विकास संस्थान, देहरादून के निदेशक के प्रति आभार प्रकट करता है जिन्होंने इस अन्वेषण के दौरान प्रोत्साहन प्रदान किया तथा गहरी रुचि दर्शाई।

निर्देश

1. बेकर, टी० टी०, Photographic Emulsion Technique, चैपमैन एण्ड हॉल लिमिटेड, लंदन, 1949, पृष्ठ 28
2. जेम्स, टी० एच० तथा हिजिन्स, जी० सी०, Fundamentals of Photographic Theory, मौर्गन एण्ड मौर्गन, इन्कौ०, न्यूयॉर्क, 1960, पृष्ठ 16
3. मीज़, सी० ई० के०, The Theory of the Photographic Process, मैकमिलन कम्पनी, न्यूयॉर्क, 1945, पृष्ठ 59
4. हिल, टी० टी०, जर्न० केमि० एजू०, 1966, 43, 492
5. कौक्स, आर० जे०, Photographic Gelatin, अकादमी प्रेस, लंदन, 1972, पृष्ठ 193
6. बौरगिनौन, एच०, जर्न० फोटोग्रा० साइन्स, 1979 27, 54
7. वाइस, ए०, The Macromolecular Chemistry of Gelatin, अकादमी प्रेस, न्यूयॉर्क, 1964
8. नग, के० सी० तथा रौस, डी० एस०, जर्न० इमेजिंग साइन्स, 1991 35, 356
9. हैस्ट, जी०, Modern Photographic Processing Vol. 1, जॉन विली एण्ड सन्स, न्यूयॉर्क, 1979 पृष्ठ 48
10. क्रूम, आर० जे० तथा क्लैग, एफ० जी०, Photographic Gelatin, फोकल प्रेस, न्यूयार्क, 1965, पृष्ठ 14
11. नोएल, सी०, रीनौट, वॉई० तथा लॉयन वाई०, जर्न० फोटोग्रा० साइन्स, 1990, 38, 20
12 उमबर्जर, जे० क्यू०, फोटो० साइन्स इन्जी०, 1967, 11, 385

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No. 3, July, 1999.

अष्टि के रूप में दो चरों वाले H-फलन के सहित बहु समाकलन वाला एक समाकल समीकरण

टी. एम. वासुदेवन नाम्बिसन

गणित विभाग, एन. ए. एस. कालेज, कन्हनगड (केरल)

[प्राप्त - मार्च 31,1998]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य अष्टि के रूप में दो चरों वाले H-फलन के सहित बहु समाकलन वाले एक समाकल समीकरण को हल करना है। इसके द्वारा नायर का परिणाम सार्वीकृत होता है। कुछ अन्य विशिष्ट दशाएँ भी दी गई हैं।

Abstract

An integral equation involving multiple integration. *By* T. M. Vasudevan Nambisan, Department of Mathematics, N. A. S. College, Kanhangad (Kerala).

The object of this paper is to solve an integral equation invloving multiple integration with the H-function of two variables as kernel. It genaralizes the result given by Nair ([2], p. 42). A few other special cases are also given.

1. परिभाषाएँ तथा परिणाम

लाप्लास रूपान्तर

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt, \ \text{Re}(p) > 0, \tag{1.1}$$

को $F(p) \doteq f(t)$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

एर्डेल्यी ([1], p. 129).

यदि $f(t)$ संतत फलन हो t का, $F(t) \doteq f(p)$ तथा

समाकल $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$ अभिसरण करता हो तो

$$t^n f(t) \doteq \left(-\frac{d}{dp}\right)^n F((p) \tag{1.2}$$

नायर तथा नैम्बिसन ([4] , p. 39)

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_2^p}{p\,!} e^{-(a_1+a_2)} t^{h_1+h_2+r+1} H^{0,1:1,2;1,1}_{0,1:2,2;1,1}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1 t^{k_1} \\ z_2 t^{k_2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} - & : (-r-h_1, k_1), (1-v_1, 1) : (1-v_2, 1) \\ (-r-h_1-h_2-1; k_1, k_2) : & (0, 1), (-h_1, k_1) \qquad : (0, 1) \end{matrix}\right]$$

$$\doteq \Gamma(v_1)\Gamma(v_2)(p+a_1)^{-1-h_1}(p+a_1+a_2)^{-1-h_2}\left[1 + z_1(p+a_1)^{-k_1}\right]^{-v_1}$$

$$\times \left[1 + z_2(p+a_1+a_2)^{-k_2}\right]^{-v_2} \tag{1.3}$$

बशर्ते कि

$$\text{Re}\,(p+a_1) > 0, \text{Re}\,(p+a_1+a_2) > 0, 2 > k_1 > 0, 2 > k_2 > 0, \text{Re}\,(1+h_1) > 0,$$

$$\text{Re}\,(2+h_1+h_2) > 0, \left|\arg . z_1 p^{-k_1}\right| < \frac{\pi}{2}(2-k_1), \left|\arg . z_2 p^{-k_2}\right| < \frac{\pi}{2}(2-k_2)$$

नायर ([3], p. 988)

माना कि

$f_r(t) \doteq F_r(p)$ $r = 1, 2, \ldots, n$ के लिए

$k(p) \doteq k(t),$

$G(p) \doteq g(t).$

तो, यदि दक्षिण पक्ष के फलन

$$g(t) \doteq k(t) \prod_{r=1}^{n} F_r(t),$$

से सम्बन्धित हों तो वाम पक्ष के फलन

$$G(p) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty k\left(p + \sum_{r=1}^{n} x_r\right) \prod_{r=1}^{n} f_r(x_r)\, dx_r \tag{1.4}$$

के द्वारा सम्बन्धित हैं बशर्ते कि $k(t)$ का रूपान्तर

$$| f_r(t) | \text{ तथा } k(t) \prod_{r=1}^{n} F_r(t)$$

विद्यमान हो।

श्रीवास्तव, गुप्ता तथा गोयल ([5], p. 19)

$$H_{p,\, q+1}^{1,\, p}\left[-x \left| \begin{matrix} (1-a_j, \alpha_j)_{1,\, p} \\ (0, 1), (1-b_j, \beta_j)_{1,\, q} \end{matrix} \right. \right] = {}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_j, \alpha_j)_{1,\, p}\,; \\ (b_j, \beta_j)_{1,\, q}\,; \end{matrix}\; x \right] \tag{1.5}$$

2. मुख्य परिणाम

प्रमेय : निम्नांकित समाकल समीकरणों

$$G(p) = A \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left[(a-D)^m (a+b-D)^c\, k\left(p + \sum_{i=1}^{r} x_i\right)\right]$$

$$\times \prod_{i=1}^{r} \left\{ \sum_{w=0}^{\infty} \frac{b^w}{w\,!} e^{-(a+b)x_i} k_i^{h_i + u_i + w + 1} H_{0,\,1\,:\,2,\,2;\,1,\,1}^{0,\,0\,:\,1,\,2;\,1,\,1}\right.$$

$$\left. \times \left[\begin{matrix} z_1 x_i^{k_1} \\ z_2 x_i^{k_2} \end{matrix} \left| \begin{matrix} \text{——} & : (-w-h_i, k_1), (1-\alpha_1, 1) : (1-\lambda_i, 1) \\ (-w-h_i-u_1-1; k_1, k_2) & : (0, 1), (-h_i, k_1) \qquad : (0, 1) \end{matrix} \right. \right] dx_i \right\}$$

तथा
$$K(p) = B \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \left[(a-D)^m (a+b-D)^d G\left(p + \sum_{i=1}^s x_i \right) \right]$$

$$\times \prod_{i=1}^s \left\{ \sum_{w=0}^\infty \frac{b^w}{w!} e^{-(a+b)x_i} k_i^{g_i+v_i+w+1} H^{0,0:1,2;1,1}_{0,1:2,2;1,1} \right.$$

$$\left. \times \left[\begin{matrix} z_1 x_i^{k_1} \\ z_2 x_i^{k_2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \text{——} & : (-w-g_i, k_1), (1-\beta_i, 1) : (1-\delta_i, 1) \\ (-w-g_i-v_i-1; k_1, k_2) : (0,1), (-g_i, k_1) & : (0,1) \end{matrix} \right] dx_i \right\}$$

(2.1)

में से प्रत्येक समीकरण दूसरे का हल है, बशर्ते कि

(i) $m, n, c, d,$ पूर्णांक हैं $\text{Re}(1 + h_i) > 0$, $\text{Re}(2 + h_i + u_i) > 0$, $i = 1$ से r तक के लिए $\text{Re}(1 + g_i) > 0$, $\text{Re}(2 + g_i + v_i) > 0$ क्योंकि $i = 1$ से s

(ii) $$\sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{i=1}^s \beta_i = 0,\ \sum_{i=1}^r \lambda_i + \sum_{i=1}^s \delta_i = 0,\ \sum_{i=1}^r h_i \sum_{i=1}^s g_i$$

$$= m+n-r-s,\ \sum_{i=1}^r u_i + \sum_{i=1}^s v_i = c+d-r-s,\ AB \prod_{i=1}^r$$

$$\times \left[\Gamma(\alpha_i) \Gamma(\lambda_i) \right] \prod_{i=1}^s \left[\Gamma(\beta_i) \Gamma(\delta_i) \right] = 1,$$

(iii) $$\text{Re}(p) > 0,\ \left| \arg z_1 p^{-k_1} \right| < \frac{\pi}{2}(2 - k_1),$$

$$\left| \arg z_2 p^{-k_2} \right| < \frac{\pi}{2}(2 - k_2),\ 2 > k_1 > 0,\ 2 > k_2 > 0$$

(iv) D प्रदर्शित करता है $p + \sum x_i$ के प्रति अवकलन को ।

उपपत्ति : माना $G(p) \doteq g(t)$ तथा $K(p) \doteq k(t)$.

व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर लेने तथा (1.3) की सहायता से (1.4) का उपयोग करने पर (2.1) में प्रथम समाकल समीकरण

$$g(t) = (a+t)^m (a+b+t)^c\, k(t) A \prod_{i=1}^{r}$$

$$\times \left\{ \Gamma(\alpha_i)\,\Gamma(\lambda_i)\,(t+a)^{-1-h_i}\,(t+a+b)^{-1-u_i} \left[1 + z_1 (t+a)^{-k_1} \right]^{-\alpha_i} \right.$$

$$\left. \times \left[1 + z_2 (t+a+b)^{-k_2} \right]^{-\lambda_i} \right\} \tag{2.2}$$

हो जाता है। इसी तरह (2.1) में द्वितीय समीकरण बन जाता है ।

$$k(t) = (a+t)^n (a+b+t)^d\, g(t) B \prod_{i=1}^{s}$$

$$\times \left\{ \Gamma(\beta_i)\,\Gamma(\delta_i)\,(t+a)^{-1-g_i}\,(t+a+b)^{-1-v_i} \left[1 + z_1 (t+a)^{-k_1} \right]^{-\beta_i} \right.$$

$$\left. \times \left[1 + z_2 (t+a+b)^{-k_2} \right]^{-\delta_i} \right\}$$

समीकरण (2.2)तथा (2.3) को एक दूसरे से समानीत किया जा सकता है जब (ii) के प्रतिबन्ध तुष्ट हों। अतः (2.1) के दोनों समाकल समीकरण एक दूसरे के हल हैं।

विशिष्ट दशाएँ

(2.1) में $k_2 = 1$, $k_1 = k$, $z_1 = z$ रखें, $z_2 \to 0$ बनावें तथा (5, p. 91, (6.4.17)) का उपयोग करें तो एक चर का H-फलन वाला परिणाम प्राप्त होगा।

निम्नांकित समाकल समीकरणों

$$G(p) = A \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left[(a-D)^m (a+b-D)^c\, k\left(p + \sum_{i=1}^{r} x_i \right) \right]$$

$$\times \prod_{i=1}^{r} \left\{ \sum_{w=0}^{\infty} \frac{b^w}{w!} e^{-(a+b)x_i} k_i^{h_i u_i + w + 1} H_{2,3}^{1,2} \right.$$

$$\times \left[zx_i^k \left| \begin{matrix} (-w-h_i, k), (1-\alpha_i, 1) \\ (0, 1)(-h, k)(-w-h_i-u_i-1; k) \end{matrix} \right. \right] dx_i \Bigg\}$$

तथा

$$K(p) = B \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left[(a-D)^n (a+b-D)^d G\left(p + \sum_{i=1}^{s} x_i \right) \right]$$

$$\times \prod_{i=1}^{s} \left\{ \sum_{w=0}^{\infty} \frac{b^w}{w!} e^{-(a+b) x_i} k_i^{g_i+v_i+w+1} H_{2,3}^{1,2} \right.$$

$$\times \left[zx_i^k \left| \begin{matrix} (-w-g_i, k), (1-\beta_i, 1) \\ (0, 1)(-g_i, k), (-w-g_i-v_i-1; k) \end{matrix} \right. \right] dx_i \Bigg\} \qquad (2.4)$$

में से प्रत्येक हल है दूसरे का बशर्ते कि

(i) m, n, c, d पूर्णांक हैं, $\text{Re}(1 + h_i) > 0$, $\text{Re}(2 + h_i + u_i) > 0$, $i = 1$ से r तक के लिए $\text{Re}(1 + g_i) > 0$, $\text{Re}(2 + g_i + v_i) > 0$, $i = 1$ से s तक के लिए

(ii) $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i = 0$, $\sum_{i=1}^{r} h_i + \sum_{i=1}^{s} g_i = m+n-r-s$, $\sum_{i=1}^{r} u_i + \sum_{i=1}^{s} v_i$

$$= c+d-r-s, \; AB \prod_{i=1}^{r} \Gamma(\alpha_i) \prod_{i=1}^{s} \Gamma(\beta_i) = 1$$

(iii) $\text{Re}(p) > 0$, $\left| \arg zp^{-k} \right| < \frac{\pi}{2}(2 - k)$, $2 > k > 0$

तथा

(iv) D प्रदर्शित करता है $p + \sum x_i$ के प्रति अवकलन को।

निम्नांकित परिणाम को प्राप्त करने के लिए जिसमें राइट्स का सार्वीकृत फलन है (2.4) में (1.5) का प्रयोग करते हैं।

$$G(p) = A \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left[(a-D)^m (a+b-D)^c K\left(p + \sum_{i=1}^{r} x_i \right) \right]$$

$$\times \prod_{i=1}^{r} \left\{ \sum_{w=0}^{\infty} \frac{b^w}{w!} e^{-(a+b)x_i} k_i^{h_i + u_i + w + 1} \right.$$

$$\left. \times {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1 + w + h_i, k), (\alpha_i, 1) & ; - zx_i^k \\ (1 + h_i, k), (2 + w + h_i + u_i; k); & \end{matrix} \right] dx_i \right\}$$

तथा

$$K(p) = B \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \left[(a-D)^n (a+b-D)^d G\left(p + \sum_{i=1}^{s} x_i \right) \right]$$

$$\times \prod_{i=1}^{s} \left\{ \sum_{w=0}^{\infty} \frac{b^w}{w!} e^{-(a+b)x_i} k_i^{g_i + v_i + w + 1} \right.$$

$$\left. \times {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1 - w - g_i, k), (\beta_i, 1) & ; - zx_i^k \\ (1 + g_i, k)(2 + w + g_i + v_i; k); & \end{matrix} \right] dx_i \right\}$$

उपर्युक्त में से प्रत्येक समीकरण दूसरे का हल है बशर्ते कि (2.4) में दिए गये प्रतिबन्ध तुष्ट हों,

i = 1 से r तक के लिए $u_i + 1 = 0$ i = 1 से s तक के लिए $v_i + 1 = 0$ रखने $c = d = 0$ तथा $b \to 0$ बनाने पर (2.5) निम्नांकित परिणाम में समानीत हो जाता है -

निम्नांकित में से प्रत्येक समाकल समीकरण

$$G(p) = A \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \left[(a-D)^m K\left(p + \sum_{i=1}^{r} x_i \right) \right]$$

$$\times \prod_{i=1}^{r} \left\{ e^{-ax_i} x_i^{h_i} \, {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\alpha_i, 1) & ; - zx_i^k \\ (1 + h_i, k); & \end{matrix} \right] dx_i \right\}$$

एवं

$$K(p) = B \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \left[(a-D)^n G\left(p + \sum_{i=1}^{s} x_i \right) \right]$$

$$\times \prod_{i=1}^{s} \left\{ e^{-ax_i} x_i^{g_i} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\beta_i, 1) & ; -zx_i^k \\ (1+g_i, k); & \end{matrix} \right] dx_i \right\} \quad (2.6)$$

दूसरे का हल है बशर्ते कि m, n पूर्णांक हों $\text{Re}(1+h_i) > 0, i = 1$ से r के लिए $\text{Re}(1 + g_i) > 0, i = 1$ से s_i के लिए

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i = 0, \sum_{i=1}^{r} h_i + \sum_{i=1}^{s} g_i$$

$$= m + n - r - s, \ AB \prod_{i=1}^{r} \Gamma(\alpha_i) \prod_{i=1}^{s} \Gamma(\beta_i) = 0,$$

$\text{Re}(p) > 0$, $\left| \arg zp^{-k} \right| > \frac{\pi}{2}(2-k)$, $2 > k > 0$ तथा D सूचक है $p + \sum x_i$ के प्रति कलन का।

(2.6) नायर ([2], p. 42) द्वारा दिये गये परिणाम से मेल खाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

यह शोधकार्य यू. जी. सी. द्वारा सहायताप्रदत्त शोध प्रोजेक्ट के अन्तर्गत सम्पन्न हुआ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए. : Tables of integral transforms, Vol. I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.
2. नायर, वी. सी. : पी. एच. डी. थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय 1969.
3. नायर, वी. सी. : Indian Journal of Pure and applied Mathematics, 1972, 3(6), 986-991.
4. नायर, वी. सी. तथा नाम्बिसन, टी. एम. वी. **विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका,** 1993, 36 (1), 36-42.
5. श्रीवास्तव, एच. एम., गुप्ता, के. सी. तथा गोयल, एस. पी. :The *H*-function of one and two variables with applications, South Asian Publishers, New Delhi & Madras, 1982.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No.3, July, 1999.

$_2F_2$ वाला एक सार्वीकृत गामा वितरण

पी० एल० सेठी तथा अशोक कुमार व्यास

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जैनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त - सितम्बर 17, 1997]

सारांश

इस प्रपत्र में $_2F_2$ वाला एक सार्वीकृत गामा वितरण दिया गया है जिसमें अग्रवाल तथा कल्ला[2] के परिवर्धित रूप पर विचार किया गया है।

Abstract

A generalized gamma distribution involving $_2F_2$. *By* P. L. Sethi and Ashok Kumar Vyas, Department of Mathematics and Statistics, J. N. Vyas University, Jodhpur (Raj.).

In this paper a generalized gamma distribution involving $_2F_2$ has been studied by considering a modified form of Agarwal and Kalla from which almost all classical probability distribution can be obtained as special cases. Expression for rth order raw moment about origin and moment generating function, mean, variance, characteristic function and integral transforms have been worked out for generalized gamma distribution involving $_2F_2$.

1. प्रस्तावना

हाल के वर्षों में गामा तथा वीबुल वितरण के अनेक सामान्यीकरण प्रस्तावित हुए हैं। [3,4,7,10,11]

कोबयाशी[6] में एक नये प्रकार का सार्वीकृत गामा फलन प्रचारित किया है और इधर के वर्षों में अग्रवाल तथा कल्ला[2] ने मापनी चर के लिए परिवर्तित सार्वीकृत गामा फलन की स्थापना की है।

2. वितरण

इस अनुभाग में $_2F_2$ वाले नवीन प्रकार के सार्वीकृत गामा फलन वितरण को निम्न रूप में परिभाषित किया गया है–

$$I = \int_0^\infty e^{-bx} x^{m-1} (x+n)^{-\lambda} \psi(x)\, dx$$

जहाँ

$$\psi(x) = {}_2F_2[\alpha, \beta; \gamma, \delta; kx]$$

तो यह समाकल निम्न रूप में समानीत हो जाता है–

$$I = b^{\lambda - m} \Gamma_\lambda(m, bn)\, {}_3F_2\left[\alpha, \beta, m-\lambda; \gamma, \delta; \frac{k}{b}\right] \tag{2.1}$$

यहाँ $R(m) > 0, R(b) > 0$ तथा b_n लघु है।

अग्रवाल तथा कल्ला के परिणाम के द्वारा[2]

$$\int_0^\infty x^{m-1} (x+n)^{-\lambda} e^{-bx} dx = b^{\lambda - m} \Gamma_\lambda(m, bn)\, b, m, n > 0 \tag{2.2}$$

परिभाषा : यादृच्छिक चर x जो $_2F_2$ वाले सार्वीकृत गामा वितरण का अनुगमन करता अपने प्रायिकता घनत्व सहित (p. d. f.) निम्न के द्वारा व्यक्त किया जाता है

$$f(x) = f(x; m, n, b, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \delta, k) = \frac{b^{m-\lambda} x^{m-1} (x+n)^{-\lambda} e^{-bx}\, {}_2F_2[\,.\,]}{\Gamma_\lambda(m, bn)\, {}_3F_2[\,..\,]}$$

जहाँ

$${}_2F_2[\,.\,] = {}_2F_2[\alpha, \beta; \gamma, \delta, kx]$$

$${}_3F_2[\,..\,] = {}_3F_2\left[\alpha, \beta, m-\lambda; \gamma, \delta; \frac{k}{b}\right] \tag{2.3}$$

जहाँ m प्राचल का आकार है, b मापनी प्राचल है, n विस्थापन प्राचल है तथा λ संगत विस्थापन प्राचल के प्रभाव की तीव्रता का प्राचल है।

यह देखा जाता है कि $\lambda = 0$ होने पर

$$\Gamma_0(m) = \frac{\Gamma(m)}{b^m}$$

क्योंकि $\lambda = 0$, $k = 0$, अतः (2.3) समानीत हो जाता है (2.4) में

$$f(x) = \frac{b^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-bx} \quad (2.4)$$

जो सामान्य गामा वितरण का p. d. f. है।

अपरंच, $\lambda = 1$, $m = 1 - a$ तथा $k = 0$ के लिए हमें अपूर्ण गामा वितरण प्राप्त होता है। $\lambda = 1$, $m = \frac{1}{2}$, $k = 0$ के लिए त्रुटि समाकल को (2.5) द्वारा व्यक्त किया जाता है

$$\Gamma_1\left(\frac{1}{2}, n\right) = \pi (bn)^{-1/2} e^{bn} \, ert.(\sqrt{bn}) \quad (2.5)$$

यह जानना रोचक है कि कोबयाशी[6] का सार्वीकृत गामा फलन दूसरे प्रकार के संगामी हाइपरज्यामितीय फलन के $U(p, q, x)$ के रूप में लिखा जा सकता है। [1] इसलिए

$$\Gamma_\lambda(m, bn) = \Gamma(m)(bn)^{m-\lambda} U(m, 1 + m - \lambda, bn) \quad (2.6)$$

$U(p, q, x)$ के गुणों का उपयोग करते हुए हम लघु bn $(m, 1 + m - \lambda)$ के लिए निम्न पर विचार कर सकते हैं

$$\Gamma_\lambda(m, bn) = \Gamma(m - \lambda);\ m - \lambda + 0, -1, -2 \quad (2.7)$$

अतः लघु an तथा $K = 0$ के लिए

$$f(x) = \frac{b^{m-1} x^{m-1} e^{-bx}}{\Gamma(M - \lambda)(x + n)^\lambda}\ x > 0 \quad (2.8)$$

3. विशिष्ट दशाएँ

इस अनुभाग में विशिष्ट दशाओं की विवेचना की जावेगी

(a) $k = 0$ या तो $\alpha = 0$ या $\beta = 0$ रखने पर (2.3) समानीत होता है (3.1) में

$$f(x) = \frac{e^{-bx} x^{m-1} (x+n)^{-\lambda}}{b^{\lambda-m} \Gamma_\lambda (M, bn)} \tag{3.1}$$

$\lambda = 0$ रखने पर (3.1) दो प्राचल गामा घनत्व में समानीत होता है जिससे घातांकी तथा काई-वर्ग वितरण को आसानी से प्राप्त किया जा सकता है

(b) जब $\beta = S$ तो (2.3) समानीत होता है

$$f(x) = \frac{e^{-bx} x^{m-1} (x+n)^{-\lambda} {}_1F_1[+]}{b^{\lambda-m} \Gamma_\lambda (M, bn) {}_2F_1[++]}$$

में, जहाँ ${}_1F_1[+] = {}_1F_1[\alpha; \gamma; kx]$

$${}_2F_1[++] = {}_2F_1\left[\alpha, m-\lambda; \gamma; \frac{k}{b}\right] \tag{3.2}$$

$\lambda = 0$ रखने पर (3.2) p. d. f के उस रूप में समानीत हो जाता है जिसे जार्ज तथा मथाई ने दिया है।[5]

(c) k के स्थान पर $-k$ रखने, $b \to 0$ होने पर $\lambda = 0$ रखने पर सक्सेना तथा मिश्रा के परिणाम की सहायता से (2.3) एक रोचक स्वरूप ग्रहण करता है।[9]

$$f(x) = \frac{k^m \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - a) \Gamma(\delta - a)}{\Gamma(M) \Gamma(\gamma) \Gamma(\delta) \Gamma(a-m) \Gamma(\beta - m)} x^{m-1} {}_2F_2[-]$$

जहाँ

$${}_2F_2[-] = {}_2F_2[\alpha, \beta; \gamma, \delta; -kx]$$

जहाँ

$$\text{Re}(m) > 0, \text{Re}(k) > 0, \text{Re}(m-d) < 0, \text{Re}(\alpha - \beta) < 0$$

$$\gamma, \delta \neq 0, -1, -2, \ldots; 0 < x < \infty$$

$$= 0, \text{अन्यत्र} \tag{3.3}$$

जिससे अनेक रोचक विशिष्ट दशायें प्राप्त होंगी।

(d) k के स्थान पर $-\delta k$ करने, $b \to 0$, $\delta \to \infty$ होने देने तथा $\lambda = 0$ और $x = y^m$ एवं $m = c/d$ रखने पर (2.3) का रूप निम्नवत् हो जाता है

$$f(y) = \frac{d\,k^{c/d}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma\left(\gamma - \frac{c}{d}\right)}{\Gamma\left(\frac{c}{d}\right)\Gamma(\gamma)\,\Gamma\left(\alpha - \frac{c}{d}\right)\Gamma\left(\beta - \frac{c}{d}\right)} \times y^{m-1}\,{}_2F_1[=]$$

जहाँ

$${}_2F_1[=] = {}_2F_1\left[\alpha, \beta;\, \gamma;\, -k y^d\right]$$

$$d > 0,\ \mathrm{Re}(k) > 0,\ \Gamma(c) > 0,\ \mathrm{Re}\left(\alpha - \frac{c}{d}\right) > 0,\ \mathrm{Re}\left(\beta - \frac{c}{d}\right) > 0$$

$$\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots;\ 0 < y < \infty$$

$$= 0.\ \text{अन्यत्र} \qquad (3.4)$$

यह p. d. f. का एक रूप है जिसे मथाई तथा सक्सेना ने[8] ज्ञात किया है जिससे सभी चिरसम्मत वितरणों को प्राचलों के चुने हुए मानों के लिए विशेष दशाओं के रूप में प्राप्त किया गया।

(e) जब $k \to b$, $m - \lambda = \gamma$ तो

$$f(x) = \frac{b^{\gamma}\,\Gamma(\delta - \alpha)\,\Gamma(\delta - \beta)}{\Gamma_{\lambda}(r + \lambda, bn)\,\Gamma(\delta)\,\Gamma(\delta - \alpha - \beta)}\, e^{-bx}\, x^{\lambda+\gamma-1}\,(x + n)^{-\lambda}\, {}_2F_2[\,.\,] \qquad (3.5)$$

$\lambda = 0$, n = 0 रखने पर तथा गास प्रमेय का उपयोग करने पर (3.5) का रूप निम्नवत् हो जाता है

$$f(x) = \frac{b^{\gamma}\,\Gamma(\delta - \alpha)\,\Gamma(\delta - \beta)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\delta)\,\Gamma(\delta - \alpha - \beta)}\, e^{-bx}\, x^{\gamma-1}\, {}_2F_2[\,.\,]$$

जहाँ ${}_2F_2[\,.\,] = {}_2F_2[\alpha, \beta;\, \gamma, \delta, kx]$

$$R(b) > 0,\ R(\gamma) > 0,\ R(\delta) > 0,\ R(\delta - \alpha - \beta) > 0$$

$$= 0.\text{अन्यत्र} \qquad (3.6)$$

(f) $x = y^d$, $m = c/d$ रखने पर

$$f(y) = \frac{d\, b^{c/d}\, e^{-by^d}\, y^{c-1}\, (y+n)^{-\lambda}\; {}_2F_2\,[\,*\,]}{\Gamma_\lambda\left(\frac{c}{d},\, bn\right) {}_3F_2\,[\,**\,]} \tag{3.7}$$

$\lambda = 0$, $n = 0$ रखने पर (3.7)

$$f(y) = \frac{d\, b^{c/d}\, e^{-by^d}\, y^{c-1}\; {}_2F_2\,[\,*\,]}{\Gamma\left(\frac{c}{d}\right) {}_3F_2\,[\,**\,]}$$

में समानीत हो जाता है जहाँ ${}_2F_2\,[\,*\,] = {}_2F_2\left[\,\alpha,\ \beta\,;\ \gamma,\ \delta\,;\ ky^d\,\right]$

$${}_3F_2\,[\,**\,] = {}_3F_2\left[\,\alpha,\ \beta,\ c/d\,;\ \gamma,\ \delta\,;\ \frac{k}{b}\right]$$

$$d > 0,\ R(b) > 0,\ R(c) > 0,\ R(k) < R(b)$$

$$\gamma,\ \delta \neq 0,\ -1,\ -2, \ldots ;\ 0 < y < \infty$$

$$= 0.\ \text{अन्यत्र} \tag{3.8}$$

p. d. f. का यह रूप सर्वाधिक सार्वीकृत रूप देगा जिससे प्रायः सारे चिरसम्मत वितरणों को विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

4. साख्यिकीय गुण तथा ${}_2F_2$ वाले कतिपय समाकल रूपान्तरण गामा वितरण

इस अनुभाग में माध्य, प्रसरण, जनक फल का घूर्ण, सार्वीकृत गामा वितरण घूर्ण के साथ-साथ मेलिन तथा लाप्लास रूपान्तरण भी दिये हैं।

प्रमेय 1 : यदि यादृच्छिक चर x ${}_2F_2$ वाले सार्वीकृत गामा फलन का प्राचलों λ, b, m, n, α, β, γ, δ, k सहित अनुसरण करे तो इसके क्रमिक माध्य तथा प्रसरण होंगे–

माध्य

$$\frac{\Gamma_\lambda(m + 1,\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,]}{b\,\Gamma_\lambda\,(m_1\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,*\,]}$$

जहाँ

$${}_3F_2\,[\,*\,] = {}_3F_2\left[\,\alpha,\ \beta\,,\ m + 1;\ \gamma,\ \delta\,;\ \frac{k}{b}\right]$$

$${}_3F_2\,[\,*\,*\,] = {}_3F_2\left[\,\alpha,\ \beta\,,\ m - \lambda\,;\ \gamma,\ \delta\,;\ \frac{k}{b}\right]$$

$$= \frac{m - \lambda}{b} \text{लघु } bn \text{ के लिए } k = 0 \text{ या } a = 0 \text{ अथवा } b = 0 \tag{4.1}$$

लघु bn के लिए $k = 0$ या $\alpha = 0$ अथवा $\beta = 0$

तथा प्रसरण

$$= \frac{b^{-2}\,\Gamma_\lambda(m + 2,\ bn)\,\Gamma_\lambda(m,\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,]}{[\,\Gamma_\lambda(m,\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,*\,*\,]\,]} - \frac{[\,\Gamma_\lambda(m + 1,\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,*\,]\,]^2}{[\,\Gamma_\lambda\,(m_1\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,*\,*\,]^2}$$

$$= \frac{m - \lambda}{b^2} \tag{4.2}$$

bn के लिए, $k = 0$, चाहे $\alpha = 0$ अथवा $\beta = 0$

जहाँ

$${}_3F_2\,[\,*\,] = {}_3F_2\left[\,\alpha,\ \beta\,,\ m + 2;\ \gamma,\ \delta\,;\ \frac{k}{b}\right]$$

$${}_3F_2\,[\,*\,*\,] = {}_3F_2\left[\,\alpha,\ \beta\,,\ m + 1;\ \gamma,\ \delta\,;\ \frac{k}{b}\right]$$

$${}_3F_2\,[\,*\,*\,*\,] = {}_3F_2\left[\,\alpha,\ \beta\,,\ m - \lambda\,;\ \gamma,\ \delta\,;\ \frac{k}{b}\right]$$

उपपत्ति : परिभाषा के अनुसार

$$\text{माध्य} = E(x) = \int_0^\infty x f(x)\, dx$$

$$= \frac{b^{-1}\,\Gamma_\lambda(m+1,\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,]}{\Gamma_\lambda(m,\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,*\,]} \tag{4.3}$$

$k = 0$ या फिर $\alpha = 0$ अथवा $\beta = 0$ रखने पर

$$= \frac{b^{-1}\,\Gamma_\lambda(m+1,\ bn)}{\Gamma_\lambda(m,\ bn)}$$

$$= \frac{(mn)\,U(m+1,\ 2+m-\lambda,\ bn)}{U(m,\ 1+m-\lambda,\ bn)}$$

$$= \frac{m-\lambda}{b}\ \text{लघु}\ bn\ \text{के लिए} \tag{4.4}$$

प्रसरण $= E(x^2) - [E(x)]^2$

$$E(x^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)\, dx$$

$$= \frac{\Gamma_\lambda(m+2,\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,]}{b^2\,\Gamma_\lambda(m,\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,*\,*\,]} \tag{4.5}$$

$k = 0$ या $\alpha = 0$ अथवा $\beta = 0$ रखने पर

$$= \frac{b^{-2}\,\Gamma_\lambda(m+2,\ bn)}{\Gamma_\lambda(m,\ bn)}$$

$$= \frac{m(m+1)\,n^2\,U(m+2,\ 3+m-\lambda,\ bn)}{U(m,\ 1+m-\lambda,\ bn)}$$

$$= \frac{(1+m-\lambda)(m-\lambda)}{b^2}\ \text{लघु}\ b_n\ \text{के लिए} \tag{4.6}$$

अतः लघु bn के लिए

$$\text{प्रसंरण} \qquad (\text{Variance}) = \frac{m - \lambda}{b^2} \tag{4.7}$$

प्रमेय 2. सार्वीकृत गामा वितरण का अनुसरण करने पर मूलबिन्दु के आसपास r वाँ घूर्ण तथा यादृच्छिक चर x के जनक फलन के घूर्ण (MGF) निम्नवत् हैं

$$\mu'_r = \frac{\Gamma_\lambda(m + r,\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,]}{b^r\,\Gamma_\lambda\,(m,\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,*\,]}$$

तथा

$$\text{M.G.F.} = \frac{\left[1 - \frac{k}{b}\right]^{\lambda - m} \Gamma_\lambda\left[m,\ bn\left(1 - \frac{t}{b}\right)\right]{}_3F_2\,[\,*\,]}{\Gamma_\lambda(m_1\ bn)\quad {}_3F_2\,[\,*\,*\,]}$$

उपपत्ति : M. G. F. परिभाषा से

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} f(x)\,dx$$

जहाँ t वास्तविक है

$$M_{x(t)} = \frac{(b - t)^{\lambda - m}\,\Gamma_\lambda(m,\ (b - t)\,n)\ {}_3F_2\,[\,*\,]}{b^{\lambda - m}\,\Gamma_\lambda(m,\ bn)\ {}_3F_2\,[\,*\,*\,]}$$

जहाँ

$${}_3F_2\,[\,*\,] = {}_3F_2\left[\alpha,\ \beta,\ m + r,\ \gamma,\ \delta;\ k\,(b - t)^{-1}\right]$$

$${}_3F_2\,[\,*\,*\,] = {}_3F_2\left[\alpha,\ \beta,\ m + r;\ \gamma,\ \delta;\ \frac{k}{b}\right]$$

$$= \frac{\left[1 - \frac{k}{b}\right]^{\lambda - m} \Gamma_\lambda\left[m,\ bn\left(1 - \frac{t}{b}\right)\right]{}_3F_2\,[\,*\,]}{\Gamma_\lambda(m,\ bn)\quad {}_3F_2\,[\,*\,*\,]} \tag{4.8}$$

जहाँ

$$ {}_3F_2[-] = {}_3F_2\left[\alpha, \beta, m + r; \gamma, \delta; k b^{-1}\left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-1}\right] $$

$$ {}_3F_2[=] = {}_3F_2\left[\alpha, \beta, m - \lambda; \gamma, \delta; \frac{k}{b}\right] $$

r वें कोटि का घूर्णन जो *p. d. f.* सहित *r. v. x.* के मूल के चारों ओर की परिभाषा है, उसे निम्नवत् परिभाषित किया जाता है

$$ \mu_r' = E(x^r) = \int_0^\infty x^\sigma f(x)\, dx $$

$$ = \frac{b^{-r}\,\Gamma_\lambda(m + r, bn)\,{}_3F_2[\$]}{\Gamma_\lambda(m, bn)\,{}_3F_2[\$\$]} $$

जहाँ

$$ {}_3F_2[\$] = {}_3F_2\left[\alpha, \beta, m - \lambda + r; \gamma, \delta; \frac{k}{b}\right] $$

$$ {}_3F_2[\$\$] = {}_3F_2\left[\alpha, \beta, m - \lambda; \gamma, \delta; \frac{k}{b}\right] \tag{4.9} $$

$k = 0$ अथवा $\alpha = 0$ या $\beta = 0$ रखने पर (4.9) अग्रवाल तथा कल्ला के परिणाम[2] में समानीत हो जाता है।

प्रमेय 3 : यदि x ${}_2F_2$ वाले सार्वीकृत गामा वितरण का अनुगमन करें तो इसका अभिलाक्षणिक फलन निम्नलिखित द्वारा व्यक्त किया जावेगा :

$$ \Phi_x(t) = \frac{\left(1 - \frac{it}{b}\right)^{\lambda - m} \Gamma_\lambda\left(m, bn\left(1 - \frac{it}{b}\right)\right){}_3F_2[+]}{\Gamma_\lambda(m, bn)\;{}_3F_2[++]} $$

उपपत्ति : x के अभिलाक्षणिक फलन $\Phi_x(S)$ को

$$ \Phi_x(t) = E[\exp\{ixt\}] $$

$$= \int_0^\infty \exp\{ixt\} f(x)\, dx \tag{4.10}$$

द्वारा व्यक्त करते हैं जहाँ $i = (-1)^{1/2}$, E गणितीय प्रत्याशा को सूचित करता है। तब अभिलाक्षणिक फलन निम्नवत् होगा

$$\Phi_x(t) = \frac{(b - it)^{\lambda - m} \Gamma_\lambda(m, (b + it)n)\, {}_3F_2[+]}{b^{\lambda - m} \Gamma_\lambda(m, bn)\, {}_3F_2[++]}$$

जहाँ

$${}_3F_2[+] = {}_3F_2\left[\alpha, \beta, m + r; \gamma, \delta; k(b - it)^{-1}\right]$$

$${}_3F_2[++] = {}_3F_2\left[\alpha, \beta, m - \lambda; \gamma, \delta; \frac{k}{b}\right]$$

$$\Phi_x(t) = \frac{\left(1 - \frac{it}{b}\right)^{\lambda - m} \Gamma_\lambda\left[m, bn\left(1 - \frac{it}{b}\right)\right] {}_3F_2[+]}{\Gamma_\lambda(m, bn)\, {}_3F_2[++]}$$

प्रमेय 4 : यदि x $_2F_2$ वाले सार्वीकृत गाम वितरण का अनुगमन करे तो इसके लाप्लास तथा मेलिन रूपान्तरों को

$$M_f(s) = \frac{b^{-s+1} \Gamma_\lambda(m + S - 1, bn)\, {}_3F_2[\S]}{\Gamma_\lambda(m, bn)\, {}_3F_2[++]}$$

तथा

$$L\{f(x)\} = \frac{\left(1 + \frac{t}{b}\right)^{\lambda - m} \Gamma_\lambda\left\{m, bn\left(1 + \frac{t}{b}\right)\right\} {}_3F_2[\div]}{\Gamma_\lambda(m, bn)\, {}_3F_2[++]} \tag{4.11}$$

के द्वारा व्यक्त किया जाता है

उपपत्ति : परिभाषा के अनुसार

$$M_f(S) = \int_n^\infty x^{x-1} f(x)\, dx = \frac{b^{\;s+1}\,\Gamma_\lambda(m + S - 1,\ bn)\ {}_3F_2\,[\ \ddagger\ ]}{\Gamma_\lambda\,(m,\ bn)\ {}_3F_2\,[++]}$$

जहाँ

$${}_3F_2\,[\ \ddagger\ ] = {}_3F_2\left[\alpha,\ \beta\ ,\ m - \lambda + S - 1;\ \gamma,\ \delta\ ;\ \frac{k}{b}\right]$$

$${}_3F_2\,[++] = {}_3F_2\left[\alpha,\ \beta\ ,\ m - \lambda;\ \gamma,\ \delta\ ;\ \frac{k}{b}\right] \tag{4.12}$$

परिभाषा के अनुसार

$$L\,\{\,f(x)\,\} = \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\, dx$$

$$= \frac{(b + t)^{\lambda - m}\,\Gamma_\lambda(m + (b + t)\,n)\ {}_3F_2\,[\ »\ ]}{b^{\lambda - m}\,\Gamma_\lambda\,(m,\ bn)\ {}_3F_2\,[++]}$$

जहाँ

$${}_3F_2\,[\ »\ ] = {}_3F_2\left[\alpha,\ \beta\ ,\ m + r\ ;\ \gamma,\ \delta\ ;\ k\,(b + t)^{-1}\right] \tag{4.13}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{t}{b}\right)^{\lambda - m}\,\Gamma_\lambda\left[m_1\ bn\left(1 + \frac{t}{b}\right)\right]\ {}_3F_2\,[\ £\ ]}{\Gamma_\lambda(m_1\ \ bn)\ \ {}_3F_2\,[++]}$$

जहाँ

$${}_3F_2\,[\ £\ ] = {}_3F_2\left[\alpha,\ \beta\ ,\ m + r\ ;\ \gamma,\ \delta\ ;\ k\,b^{-1}\left(1 + \frac{t}{b}\right)^{-1}\right]$$

${}_3F_2\,[++]$ ऊपर परिभाषित है (4.14)

निर्देश

1. अब्रामोविट्स, एम० तथा स्टेंगन, आई० ए० : Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1972.
2. अग्रवाल, एस० के० तथा कल्ला, एस० एल० : Commun Statist. Theory Meth., 1966 , 25(1), 201-210
3. बांडेसन, एल० : Generalized Gamma Convolutions Densities, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1992.
4. ब्रैडेले, एम० : Statist Thory and Method, 1998, 17, 507-517.
5. जार्ज ए० तथा मथाई, ए० एम० : *Sankhya*, 1975, 37 Series B, 312-332
6. कोबयाशी, के० : *J. Physical Society of Japan*, 1991, 60(5), 1501-15012
7. ली०, एम० तथा ग्रास, ए० : *J. Static. Planni. and Inference* 1991, 29, 137-143.
8. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के० : *Metrika*, 1966, 11, 127-132.
9. सक्सेना, आर० के तथा मिश्रा के० एन० : *J. Nat. Aca. Maths.*, 1991, vol. 9.
10. श्रीवास्तव, जे० : *Statis., Theory and Method*, 1989, 18, 1187-1192.
11. स्टैसी, ई० डब्लू : Annals of Mathematical Statistics, 1962, 33, 1187-1192

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No.3, July, 1999.

विचरणशील चुम्बकीय प्रेरण युक्त दो समान्तर प्लेटों के मध्य सरंध्र माध्यम में से होकर एक श्यान स्तरीकृत तरल के अस्थायी तरल की भ्रमिलता

बी० एस० द्विवेदी तथा अजय पाल सिंह

गणित विभाग, अतर्रा परास्नातक महाविद्यालय, अतर्रा (उ० प्र०)

[प्राप्त - जनवरी 16, 1998]

सारांश

इस प्रपत्र में दो समान्तर प्लेटों के बीच विचरणशील घनत्व तथा श्यानता वाले स्तरीकृत श्यानता प्रवाह की भ्रमिलता का अध्ययन किया गया है।

Abstract

On the vorticity of unsteady flow of a viscous stratified fluid through a porous medium between two parallel plates with variable magnetic induction. *By* B. N. Dwivedi and Ajay Pal Singh, Department of Mathematics, Atarra Post-graduate College, Atarra (U.P.).

In this paper an attempt has been made to study the vorticity of an electrically conducting stratified viscous flow through a porous medium in a longitudinal channel in presence of tranverse exponentially variable magnetic induction when the stream velocity at the lower plate fluctuates with time. The effect of change in magnetic field and stratification factor over the vorticity of flow have been studied numerically and graphically.

प्रस्तावना

बाह्य अस्थायी विचलन के प्रति परिसीमा स्तर की अनुक्रिया से सम्बद्ध काल आश्रित प्रवाह समस्या पर विचार करने का शुभारम्भ लाइटहिल[9], मेसीहा[12], प्रकाश तथा राजवंशी[13] द्वारा किया गया है। यिन[16] ने तरल प्रवाह पर घनत्व विचरण के प्रभाव का अध्ययन किया है। चन्ना, बसघ तथा रंगाना[2] ने एक प्रवेश्य तह में से होकर श्यान स्तरीकृत तरल के प्रवाह का अध्ययन किया है। अहमदे तथा मानवी[1] ने सामान्य प्रवाह समीकरण व्युत्पन्न किया और प्राप्त परिणाम को कतिपय मूलभूत प्रवाह समस्याओं के लिए सम्प्रयुक्त किया। गुलाब राम तथा मिश्र[3] ने इन समीकरणों का उपयोग जल चुम्बकीय सछिद्र माध्यम में से होकर अस्थायी प्रवाह की समस्या की खोज करने के लिए प्रयुक्त किया। गुप्त तथा शर्मा ने[4] स्तरीकृत श्यान प्रवाह का अध्ययन गतिशील अप्रवेश्य प्लेट के द्वारा बनाई गई नलिका में स्थूल प्रवाह दर पर स्तरीकरण का प्रभाव जानने के लिए किया। गुप्ता तथा गुप्ता[5] ने विचरणशील घनत्व वाले स्तरीकृत श्यान प्रवाह का अध्ययन अनुप्रस्थ चर घातांकी विचरणशील चुम्बकीय प्रेरण की उपस्थिति में दो प्लेटों के मध्य किया। इस प्रपत्र में हम दो समान्तर प्लेटों के बीच विचरणशील घनत्व तथा श्यानता वाले स्तरीकृत श्यान प्रवाह की भ्रमिलता का अध्ययन करेंगे। इसमें अनुप्रस्थ चरघातांकी विचरणशील चुम्बकीय प्रेरण उपस्थित रहेगा। यहाँ पर हमने दाब प्रवण को दो समान्तर प्लेटों के मध्य की दूरी के फलन के रूप में मान लिया है।

समस्या का सूत्रीकरण तथा हल

हम विद्युत संचालित करने वाले स्तरीकृत श्यान तरल की अर्ध अनन्त माध्यम में से होकर गति पर विचार करेंगे। यह तरल परम प्रवेश्यता वाला है और h दूरी पर दो पड़ी हुई समान्तर प्लेटों द्वारा परिबद्ध है और चरघातांकी अनुप्रस्थ ह्रासमान चुम्बकीय प्रेरण विद्यमान है। माना कि X-अक्ष तथा Z-अक्ष क्रमशः प्लेट पर अभिलम्ब हैं।

तरल की गति को नियन्त्रित करने वाले समीकरण हैं –

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\mu \frac{\partial u'}{\partial z'}\right) - \frac{\mu}{t'} - \sigma B^2 u' \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z'} = -\rho g \tag{2}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x'} = 0 \tag{3}$$

जहाँ μ' तरल का वेग है, t' काल का फलन हैं, p' वह दाब है जो तरल गति के ऊपर प्रभावी है, ρ का घनत्व है तथा μ तरल की श्यानता है और β चुम्बकीय प्रेरण है जो तरल गति पर लगाया गया है।

माना

$$\left.\begin{aligned} \rho &= p_0 e^{\beta z'} \\ \mu &= \mu_0 e^{\beta z'} \\ \text{तथा} \quad B &= B_0 e^{\beta z'/2} \end{aligned}\right] \quad (4)$$

जहाँ ρ_0, μ_0 एवं B_0 क्रमशः तरल के घनत्व तथा श्यानता और चुम्बकीय प्रेरण हैं $z' = 0$ पर तथा $\beta > 0$ एक स्तरीकरण गुणक है

पुनश्च, माना कि दाब प्रवण

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\lambda e^{-\beta z'} \quad (5)$$

है तो समीकरण (4) तथा (5) की सहायता से समीकरण (1)

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \lambda + \mu_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} - B\mu_0 \frac{\partial u'}{\partial z'} - \mu_0 \left(\frac{1}{k'} + \frac{\sigma B_0^2}{\mu_0} \right) U' \quad (6)$$

में समानीत हो जाता है।

जब हम अ-दिक्कीय मात्राओं का समावेश इस प्रकार करते हैं।

$$\left.\begin{aligned} M^2 &= \left(\frac{1}{k} + \frac{\sigma B_0^2}{\mu_0} \right), \quad u' = \frac{\lambda u}{u_0 M^2} \quad \text{पर} \\ t' &= \frac{\rho_0^t}{\mu_0}, \qquad\qquad z' = z \quad \text{पर} \end{aligned}\right] \quad (7)$$

परिसीमा प्रतिबन्ध हैं-

$$\left.\begin{aligned} u &= 1 + \varepsilon' e^{iwt} \qquad z = 0 \quad \text{पर} \\ u &= U \qquad\qquad z = h \quad \text{पर} \end{aligned}\right] \quad (8)$$

अ-दिपक्कीय मात्राओं के समावेश से समीकरण (6) निम्न रूप धारण करता है

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial z} - M^2 u + M^2 \tag{9}$$

माना है कि (9) का हल इस प्रकार है

$$u = \alpha_1 (z) + \varepsilon \alpha_2 (z) e^{iwt} \tag{10}$$

जहाँ $\alpha_1 (z)$ तथा $\alpha_2 (z) e^{iwt}$ क्रमशः काल निरपेक्ष तथा काल आश्रित अंश है। समीकरण (9) में μ का मान रखने पर तथा काल आश्रित एवं काल निरपेक्ष अंश को पृथक करने पर

$$\frac{d^2 \alpha_1}{d z^2} - \beta \frac{d\alpha_1}{dz} - M^2 \alpha_1 + M^2 + 0 \tag{11}$$

तथा

$$\frac{d^2 \alpha_2}{dz^2} - \beta \frac{d\alpha_2}{dz} - \left(M^2 + iw \right) \alpha_2 = 0 \tag{12}$$

परिसीमा प्रतिबन्ध (8) बनता है-

$$\left. \begin{aligned} u_1 (z) = 1 \quad & z = 0 \quad \text{पर} \\ \alpha_1 (z) = 1 \quad & z = 0 \quad \text{पर} \end{aligned} \right] \tag{13}$$

तथा

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 (z) = e^{iwt} \quad & z = 0 \ \text{पर} \\ \alpha_2 (z) = 0 \quad & z = h \ \text{पर} \end{aligned} \right] \tag{14}$$

समीकरण (11) का हल परिसीमा प्रतिबन्ध बन्ध (13) के अन्तराल सन्दर्भ (7) के द्वारा निम्न रूप में दिया जाता है।

$$\alpha_1 (z) = 1 + \frac{(U - 1) \sinh [\sqrt{(\beta^2 + 4M^2)}\, z/2]}{e^{B(h - z)/2} \, [\sinh \{\sqrt{(B + 4M^2)}\, h/2\}]} \tag{15}$$

इसी तरह परिसीमा प्रतिबन्ध (14) के अन्तर्गत समीकरण (12) का हल निर्देश (7) द्वारा

$$\alpha_2(z) = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} e\,[\,\beta + \sqrt{\beta^2 + 4(M^2 + 4(M^2 + iw)}\, z/2)$$

$$- \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} e\,[\,\beta \frac{z}{2} + \sqrt{\beta^2 + 4(M^2 + 4(M^2 + iw)}\, h/2)$$

$$\times \frac{\sinh[\sqrt{\beta^2 + 4(M^2 + iw)}\, z/2]}{\sinh[\sqrt{\beta^2 + 4(M^2 + iw)}\, h/2]} \quad (16)$$

के रूप में दिया जाता है जिसमें $\alpha_1(z)$ तथा $\alpha_2(z)$ के मान रखने पर प्रवाह का वेग समीकरण (17) द्वारा दिया जाता है-

$$u = \frac{1 + (U - 1)\sinh[\sqrt{\{\beta^2 + 4M^2\}}\, z/2]}{eB(h - z)/2\,[\sinh\sqrt{\{\beta^2 + 4M^2\}}\, h/2]}$$

$$- \varepsilon' e^{iwt} \frac{\sinh[\{\sqrt{\beta^2 + 4(M^2 + iw)}\}\,(h - z)/2]}{\sinh[\sqrt{\{\beta^2 + 4(M^2 + iw)\}}\, h/2]}$$

$$= Ur + i\,U_i \quad (17)$$

जहाँ u_r तथा u_i u कें वास्तविक तथा काल्पनिक अंग हैं और समीकरण (18) तथा (19) द्वारा व्यक्त किये जाते हैं-

$$U_r = 1 + (U - 1)\,\frac{\sinh[\sqrt{(\beta^2 + 4M^2)}\, z/2]}{e^{\beta(h - z)/2}\,[\sinh\sqrt{(\beta^2 + 4M^2)}\, h/2]}$$

$$- \varepsilon' e^{\beta z/2}\,[\,e^{(2h - z)\,R\cos\theta}\cos(Rz\sin\theta - wt)$$

$$- e^{Rh\cos\theta}.\cos(Rh\sin\theta + wt) - e^{R(h - z)\cos\theta}.$$

$$\times \cos\{R(h - z)\sin\theta + wt\} + \cos wt\,]$$

$$\div [\,1 + e^{(2Rh\cos\theta)} - 2\,e^{Rh\cos\theta}.\cos(Rh\sin\theta)\,] \quad (18)$$

तथा
$$U_i = [\sin wt - e^{(2h-z)R\cos\theta}$$
$$\times \sin(Rz\sin\theta - wt) + e^{Rh\cos\theta}$$
$$\times \sin(Rh\sin\theta + wt) - e^{R(h-z)\cos\theta}$$
$$\times \sin R(h - z)\sin\theta + wt]$$
$$\div \left[1 + e^{2Rh\cos\theta} - e^{Rh\cos\theta} \times \cos(Rh\sin\theta)\right] \quad (19)$$

जहाँ $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4w}{\beta^2 + 4M^2}\right)$

$R = \left[16w^2 + \left(\beta^2 + 4M^2\right)^2\right]^{1/4}$

प्रवाह की भ्रमिलता (17) को
$$\zeta = \frac{\partial u_r}{\partial z} + i\frac{\partial U_i}{\partial z}$$
द्वारा व्यक्त करते हैं जहाँ
$$\frac{\partial U_r}{\partial z} = \frac{(U - 1)}{2} e^{-B(h-z)/2} [\sqrt{(\beta^2 + 4M^2)}$$
$$\times \frac{\{\cosh(\beta^2 + 4M^2)z/2\}}{\sin\{(\sqrt{\beta^2 + 4M^2})h/2\}} + \beta\frac{\sinh\{\sqrt{(\beta^2 + 4M^2)}z/2\}}{\sinh\{\sqrt{(\beta^2 + 4M^2)}R/2}$$
$$- \varepsilon'\frac{\beta}{2} e^{\beta z/2} [e^{(2h-z)\cos\theta} \times \cos(Rz\sin\theta - wt)\, e^{Rh\cos\theta}$$
$$\times \cos(Rh\sin\theta` - wt)] - e^{R(h-z)\cos\theta}$$
$$\times \cos\{R(h - z)\sin\theta + wt\} + wt]$$

$$+ 1 + e^{2Rh\cos\theta} - 2e^{\cdot Rh\cos\theta}\cos(Rh\sin e)$$

$$- \varepsilon' e^{\beta z/2}[-Re^{(2h-z)R\cos\theta} \times \cos(Rz\sin e - wt - \theta)$$

$$+ \mathrm{Re}(h - z)R\cos\theta \times \cos\{R(h - z)\sin e + wt - e\}]$$

$$\div \{1 + e^{2Rh\cos\theta} - 2e^{2Rh\cos\theta}\cos(Rh\sin e)\} \qquad (21)$$

तथा

$$\frac{\partial U_i}{\partial z_2} = \frac{R[e^{(2h-z)R\cos\theta}, \sin(Rh\sin e - wt - e) + e^{R(h-z)\cos\theta} \sin R(h-z)\sin\theta + wt - \theta]}{\{1 + e^{2Rh\cos\theta} - e^{Rh\cos\theta}\cos(Rh\sin\theta)\}}$$

चुम्बकीय अंक M तथा प्रवाह की भ्रमिलता पर स्तरीकरण गुणांक में परिवर्तन का अध्ययन करने के लिए सांख्यिकीय परिगणनाएँ की गई।

विश्लेषण के लिए ζ का वास्तविक मान सार्थक है।

सारणी 1

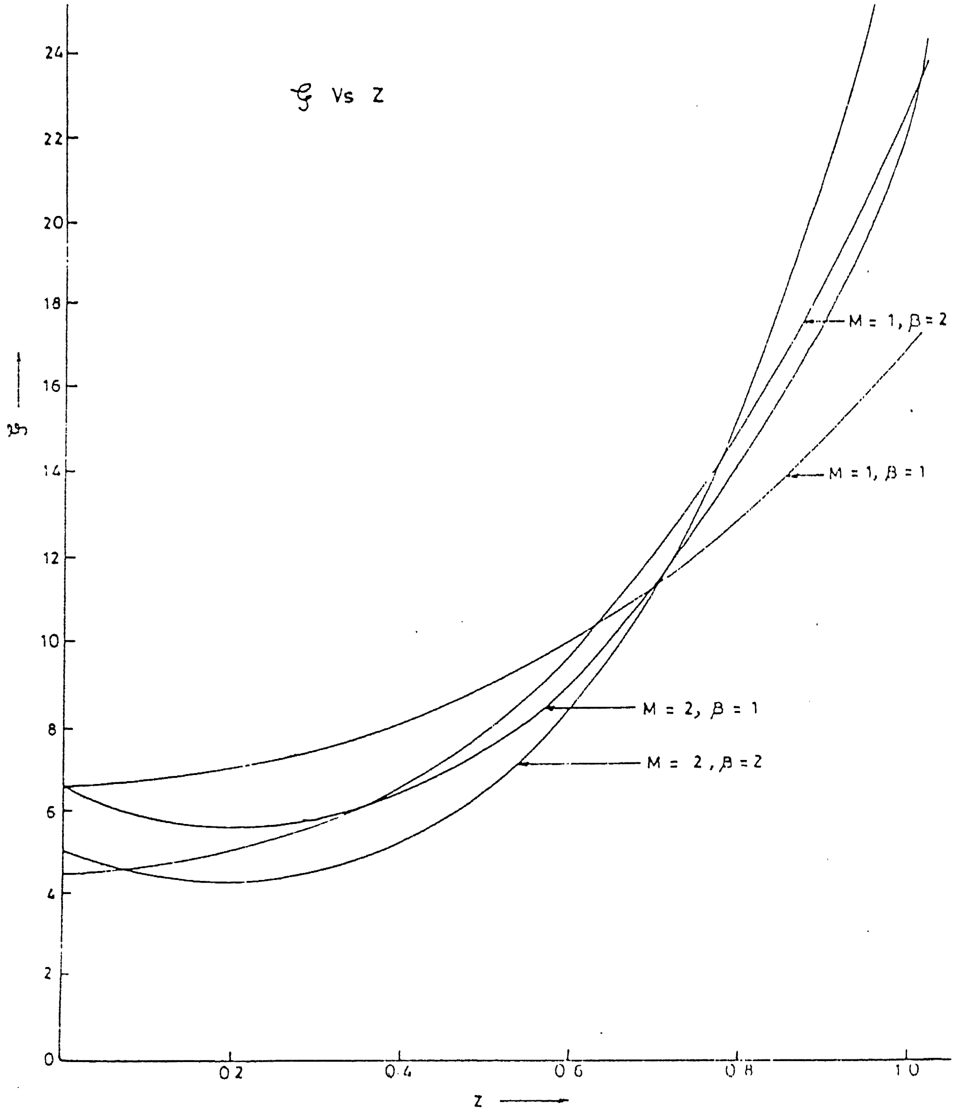
$\varepsilon = 1, h = 1, U = 10, w = 1, t = 0, \beta = 1$

M	Z / ζ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	ζ	6.6152	6.9948	8.1876	10.1355	13.0951	17.3625
2	ζ	6.7091	5.5059	6.5977	9.2368	14.5678	23.6658

सारणी 2

$\varepsilon = 1, h = 1, U = 10, w = 1, t = 0, \beta = 2$

M	Z / ζ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	ζ	4.5003	5.1277	6.7586	9.8245	15.1105	23.587
2	ζ	5.1251	4.3291	5.3871	8.7399	15.8924	29.7281



चित्र 1. विचरणशील चुम्बकीय प्रेरण युक्त दो समान्तर प्लेटों के मध्य सरंध्र माध्यम में से होकर एक श्यान स्तरीकृत तरल के अस्थायी तरल की भ्रमिलता

विवेचना

$t = 0$ पर $\varepsilon' = 1, h = 1, U = 10, w = 1$ मान होने पर भ्रमिलता ζ का परिगणन M तथा β के विभिन्न सम्मेलों वाले मान के लिए किया गया।

सारणी 1 तथा आरेख से पता चलता है कि स्तरीकरण गुणांक β के बढ़ाने पर, जब चुम्बकीय क्षेत्र स्थिर हो, तो भ्रमिलता प्लेट के निकट घटती है। किन्तु ज्यों ज्यों हम दो प्लेटों के बीच की नलिका (channel) के मध्य से ऊपरी प्लेट की ओर दूर जाते हैं तो भ्रमिलता में आकस्मिक ह्रास दिखता है। यह प्रवृत्ति चुम्बकीय प्रेरण में घाती विधि से ह्रास के कारण है।

जैसे जैसे स्तरीकरण गुणक में बिना परिवर्तन चुम्बकीय क्षेत्र का विस्तार किया जाता है निचली प्लेट पर भ्रमिलता बढ़ जाती है। तत्पश्चात् पहले यह घटती है तब बढ़ने की प्रवृत्ति दिखलाती है। ज्यों ही हम ऊपरी प्लेट के पास पहुँचते हैं कि वह तेजी से बढती है और ऊपरी चुम्बकीय क्षेत्र में वृद्धि होने पर ऊपरी प्लेट पर भ्रमिलता तेजी से बढ़ती है। अति उच्च चुम्बकीय क्षेत्रों के लिए निचली प्लेट के पास लघु भ्रमिलता का क्षेत्र पाया जा सकता है। किन्तु उस चुम्बकीय क्षेत्र पर विस्थापन धाराएँ भी कार्यशाली हो जावेंगी। अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि भ्रमिलता का दमन और अनुत्पत्ति के प्रतिबन्धों का प्रेक्षण करने के लिए न तो चुम्बकीय क्षेत्र, न ही स्तरीकरण गुणक ही अनुकूल है।

निर्देश

1. अहमदीऊ, जी० तथा मानवी, आर० : *Indian Journal of Tech.*, 1971, 9, 441
2. चन्नाबसप्पा, एम० एन० तथा रंगहा, जी० : *Proc. Indian Acad. of Sciences*, 1976, 83, 145-55
3. गुलाबराम तथा मिश्रा, आर० एस० : *Indian Journal of Pure & Applied Mathematics*, 1977, 8(6), 637-47
4. गुप्ता, ए० स० : *ZAMP*, 1960, 11, 43
5. गुप्ता, ए० एस० : डी० एस-सी० थीसिसस, इण्डियन इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालॉजी, खडगपुर, 1966
6. गुप्ता, एस० पी० तथा शर्मा, जी० सी० : *Indian Journal of Pure & Applied Mathematics*, 1978 9(3), 290-97
7. गुप्ता, सी० बी० तथा गुप्ता, एस० पी० : *Acta Ciencia Indica*, 1986, XIIm, 1, 55
8. ककुतानी, टी० : *ZAMP*, 1961, 12, 219
9. लाइटहिल, एम० जे० : *Proc. Royal Society*, 1954, 224(A), 1-23
10. वही,

11. मण्डल, के० के० : *The Mathematics Students,* 1977, 45(3), 10-17

12. मसीहा, एस० ए० एस० : *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1966, 62, 329-37

13. प्रकाश, ओ० तथा राजवंशी, एस० सी० : *Indian Journal of Pure & Applied Mathematics,* 1978, 9(7), 728

14. रे, एम० तथा अग्रवाल, जे० सी० : *Bull. Cal. Math. Soc.* 1964, 56, 171.

15. शरक्लिफ, जे० ए० : *F. Fluid Mech.* 1956, 1, 644

16. यिन, सी० एस० : *Journal of Geophysics Research,* 1959, 64(12), 2219

जैव-प्रौद्योगिकी पर विज्ञान परिषद् प्रयाग द्वारा 4 एवं 5 दिसम्बर को संगोष्ठी का आयोजन

जैव-प्रौद्योगिकी विभाग, भारत सरकार के आर्थिक सहयोग से आगामी 4 एवं 5 दिसम्बर 1999 को विज्ञान परिषद् ''इक्कीसवीं सदी में जैव-प्रौद्योगिकी के नये आयाम'' विषय पर एक दो-दिवसीय राष्ट्रीय संगोष्ठी का आयोजन करने जा रहा है।

इस संगोष्ठी का उद्‌घाटन जैव-प्रौद्योगिकी विभाग, भारत सरकार, नई दिल्ली की सचिव डॉ० मंजू शर्मा के कर कमलों द्वारा 4 दिसम्बर को पूर्वान्ह 9.00 बजे होगा। उद्‌घाटन-सत्र में ही डॉ० वी० पी० शर्मा (नई दिल्ली) का व्याख्यान, और इसके बाद शोध-निबंधों का प्रस्तुतिकरण, द्वितीय सत्र में काशी हिन्दू विश्वविद्यालय के डॉ० बी० डी० सिंह का व्याख्यान और बाद में शोध-निबंधों का प्रस्तुति-करण।

5 दिसम्बर को तृतीय सत्र में इफको, लखनऊ के डॉ० एस० के० ओझा के व्याख्यान के पश्चात् शोध-निबंधों का प्रस्तुतिकरण। चतुर्थ सत्र में इलाहाबाद के प्रो० उमाशंकर श्रीवास्तव के व्याख्यान के बाद शोध-निबंधों का प्रस्तुतिकरण और पाँचवें सत्र में मेरठ (अब हरियाणा) के डॉ० पी० के० गुप्ता के व्याख्यान के बाद शोध-निबंधों का प्रस्तुतिकरण और समापन समारोह।

संगोष्ठी के विषय हैं-

- जैव-प्रौद्योगिकी की उपलब्धियाँ एवं समस्यायें
- मलेरिया एवं अन्य संक्रामक रोगों में जैव-प्रौद्योगिकी की भूमिका
- जैव-प्रौद्योगिकी और कृषि
- जैव-प्रौद्योगिकी एवं उद्योग
- आनुवंशिक अभियांत्रिकी
- पादप कोशिका एवं ऊतक संवर्धन
- आनुवंशिक रोगों की पहचान में जैव-प्रौद्योगिकी
- आण्विक जैविकी : जीन क्लोनिंग
- जैव-उर्वरक, जैवीय नाइट्रोजन स्थिरीकरण एवं जैव-प्रौद्योगिकी
- जैव-प्रौद्योगिकी एवं पेटेंट्स
- जैव-प्रौद्योगिकी द्वारा अपशिष्टों का निवारण
- जैव-प्रौद्योगिकी एवं पर्यावरण
- जैव-प्रौद्योगिकी पर कोई अन्य विषय

इस संगोष्ठी में देश के प्रसिद्ध वैज्ञानिकों और विज्ञान लेखकों के भाग लेने की सूचना प्राप्त हुयी है। संगोष्ठी में शोध निबंध वाचन करने वाले सभी विद्वानों से निवेदन है कि यदि अपने शोध-निबंध की एक प्रति (जो छपकर 3-4 पृष्ठों में आ जाये) संगोष्ठी की तिथियों के पूर्व ही हमें भेज दें तो उन्हें व्यवस्थित करके एक साथ प्रकाशित करने में सुविधा होगी।

प्रेमचन्द्र श्रीवास्तव

संयोजक, संगोष्ठी

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. 100 or £ 12 or $ 40
Per Vol. Rs. 25 or 3£ or $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211 002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
७ बेंली एवन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405

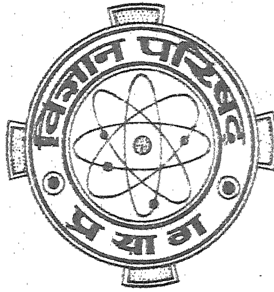
ISSN : 0505 - 5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 42 October 1999 No. 4



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

विषय-सूची

Vol. 42 October 1999 No. 4

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No.4, October, 1999.

भाषा विज्ञान एवं मानवविज्ञान *

महावीर सरन जैन

निदेशक, केन्द्रीय हिन्दी संस्थान, आगरा

[प्राप्त – 13 नवम्बर 1999]

सारांश

भाषा विज्ञान तथा मानवविज्ञान में कुछ प्रक्रियाएँ तथा गुण समान हैं। भाषा मानव की मूलभूत सक्रियताओं और उसकी संस्कृति का अभिन्न अंग है। भाषा का अध्ययन मानवविज्ञानियों को और व्यवहार तथा मानविकी से सम्बद्ध जिज्ञासुओं को भी उपयोगी तथा महत्त्वपूर्ण निर्देश देता है। उसी तरह संस्कृति का अध्ययन भाषाविज्ञानियों को निर्देश देता है।

यद्यपि भाषाविज्ञान तथा मानवविज्ञान के मध्य अतिव्यापन है तो भी दोनों शास्त्र भिन्न-भिन्न हैं।

प्रस्तुत व्याख्यान में इन शास्त्रों तथा विचारों की सूक्ष्म संकल्पनाओं का विश्लेषण करने का प्रयास किया गया है और शोध के लिए नवीन दिशाएँ इंगित की गई हैं।

Abstract

Linguistics and anthropology. *By* Mahabir Saran Jain, Director, Kendriya Hindi Sansthan, Agra (U. P.).

Linguistics and anthropology share certain processes and properties in common. Language is a fundamental activity of man, is an integral part of his culture. Language-study provides useful, sometimes crucial, directions to the anthropologists, as-well-as to the students of related behavioral and humanistic disciplines. In the same way, culture-study provides directions to the linguists.

* 13 नवम्बर 1999 को डा० उदयनारायण तिवारी स्मृति व्याख्यान माला के अन्तर्गत दिया गया तृतीय व्याख्यान।

Though there is an overlap between linguistics and anthropology yet both are different disciplines.

The present paper is an attempt to analyze and discuss the subtle concepts of these disciplines and thought provoking ideas, indicating a new direction of research, are expounded.

क्रोबर की मान्यता है कि मानवविज्ञान भाषाविज्ञान पर आश्रित रहता है।[1] मेलिनोव्स्की ने प्रतिपादित किया है कि किसी जन-जाति की भाषा का अध्ययन बिना उसकी संस्कृति को जाने असंभव है।[2]

भाषा एवं संस्कृति की अवधारणा

जिस प्रकार भाषा-विज्ञान में भाषा का विशिष्ट अर्थ है उसी प्रकार मानव-विज्ञान में संस्कृति की विशिष्ट अवधारणा है।

इतिहास, दर्शन एवं साहित्य जैसे अध्ययन-विषयों में संस्कृति को मनुष्य-जीवन को सार्थक बनाने वाली सुसंस्कारों की योजना माना जाता है। मानव-विज्ञान में संस्कृति का विशिष्ट अर्थ है। इसमें किसी मानव-जाति की संस्कृति का अर्थ उसके द्वारा सीखे हुए विशिष्ट व्यवहार-प्रकारों की समग्रता है।

मानव-विज्ञान की दृष्टि से संस्कृति की स्वरूपगत विशेषताएँ निम्नलिखित हैं ---

(1) संस्कृति किसी मनुष्य-जाति के सभी प्रकार के व्यवहार-प्रकारों की समग्रता है।

(2) मनुष्य संस्कृति को समाज में रहकर सीखता है।

(3) संस्कृति जैविकीय विरासत का परिणाम नहीं है।

(4) प्रत्येक मानव समूह की संस्कृति में विशिष्टता होती है।

(5) संस्कृति मनुष्यों के परस्पर व्यवहार से सम्बद्ध है।

(6) सभ्य तथा असभ्य जैसी संस्कृतियों का भेद भ्रामक है।

(7) जिस समाज के लोगों की जो रीति है वही उनकी संस्कृति है।

(8) मनुष्य ही संस्कृति को ग्रहण करता है। यह मनुष्य जाति की विशिष्टता है जो उसे पशु जगत से भिन्न बनाती है।

भाषा विज्ञान के परिप्रेक्ष्य में भाषा की स्वरूपगत विशेषताएँ निम्नलिखित हैं----

(1) इकाई की दृष्टि से भाषा व्यक्ति के वाक्-व्यवहार की आदतों का समुच्चय है। समूहगत

दृष्टि से भाषा का अपने भाषा-क्षेत्र से समस्त प्रकार के भाषिक एवं शैलीगत रूपों की समग्रता है।

(2) मनुष्य भाषा को समाज में रहकर सीखता है।

(3) भाषा प्राकृतिक एवं पैतृक संपत्ति नहीं है।

(4) प्रत्येक भाषा में व्यवस्था एवं संरचनागत विशिष्टिता होती है। प्रत्येक भाषा का अपना शब्दकोश होता है, प्रत्येक शब्द का विशिष्ट अर्थ होता है। प्रत्येक भाषा अपने बोलने वाले मानव-समूह की सामाजिक आवश्यकताओं एवं उसके जीवन के सांस्कृतिक पक्ष को अभिव्यक्त करती है। इस प्रकार प्रत्येक भाषा में विशिष्टता होती है।

(5) एक भाषा-समाज के भाषा-भाषी अपनी भाषा के विविध रूपों के माध्यम से परस्पर भाषा-व्यवहार करते हैं।

(6) प्रत्येक भाषा अपने बोलने वालों की सामाजिक एवं सांस्कृतिक आवश्यकतानुसार अपने में पूर्ण होती है। यह अपने भाषा-समुदाय के लिए उतनी ही अच्छी या उतनी ही बुरी होती है जितनी कोई भी दूसरी भाषा उसके भाषा-समुदाय के लिए हो सकती है।

(7) भाषा-समाज में भाषा जिस तरह से बोली जाती है, वही भाषा है।

(8) भाषा-विज्ञान में मानव जाति की भाषा का अध्ययन किया जाता है। भाषा शब्द का प्रयोग मनुष्य के उच्चारण-रूपों के लिए प्रयुक्त होता है। मानवेतर प्राणियों की आवाजों को 'भाषा' की शास्त्रीय सीमा में समाविष्ट नहीं किया जाता।

संबद्ध अध्ययन परंपरा

दोनों अध्ययन-विषयों में कार्य करने वाले विद्वानों की परंपरा विशेषतः इंगलैण्ड, फ्रांस, स्विटजरलैण्ड तथा अमेरिका में मिलती है। इस परंपरा के प्रवर्तक प्रमुख विद्वानों तथा उनके कार्यों एवं अध्ययन-दृष्टियों पर संक्षेप में विचार करना उपयुक्त होगा। इससे दोनों अध्ययन विषयों के संबंध की आधारभूमि स्पष्ट हो सकेगी।

(1) ब्रिटिश परंपरा—इंगलैण्ड में आदिम समाजों के अध्ययन एवं विवेचन की दृष्टि से सबसे पहले मैकलेनन तथा टायलर ने उल्लेखनीय कार्य किया। टायलर (1832-1917) ने अपनी कृतियों में संस्कृति की प्रकृति एवं विकास के संदर्भ में भाषा के ऐतिहासिक एवं सैद्धांतिक पक्षों का अध्ययन किया है। पोलैण्ड में जन्मे एवं पढ़े मेलिनोव्स्की (1884-1942) इस परंपरा के प्रकाशस्तंभ हैं, आदिम समाज की भाषा के माध्यम से अपना शोधकार्य करने वाले ये पहले मानववैज्ञानिक हैं। इन्होंने विवेच्य-क्षेत्र की भाषा के माध्यम से क्षेत्रीय संस्कृति का अध्ययन करने पर बल दिया। इन्होंने सन् 1914 से 1918

तक ओशेनिया में कोरल सागर में पपुआ-न्यू गिनि के पूर्व में स्थित ट्रोब्रिएंड दूवीपवासियों का अध्ययन किया। उनका विचार है कि सामाजिक पदुधति कार्यकलापों तथा घटनाओं का अनुक्रम है। किसी प्रजाति के भिन्न-भिन्न कार्यकलाप मिलकर उसकी सामाजिक-पदुधति का निर्माण करते हैं। किसी प्रजाति के विविध कार्यकलापों को जाने बिना हम उसकी सामज-पदुधति को नहीं जान सकते।[3]

भाषा का कार्य मनुष्य जाति के क्रियाकलापों को रूप प्रदान करना है। अपनी इस विचारधारा के कारण मैलिनोव्स्की का मत है कि आदिम समाजों की भाषा के अध्ययन के लिये उनकी संस्कृति का पूर्ण ज्ञान अनिवार्य है। भाषिक-रूप अपने बोलने वालों के भौतिक, मानसिक, सामाजिक एवं सांस्कृतिक तत्वों से प्रभावित होते हैं। मैलिनोव्स्की के भाषा संबंधी विचारों की आलोचना भी हुई है। यहाँ इसकी विवेचना अभीष्ट नहीं है। संप्रति, दो बातों का उल्लेख करना जरूरी है---

(1) मैलिनोव्स्की स्वयं 'वर्णनात्मक-भाषावैज्ञानिक' नहीं थे। उनके विचारों का मूल्यांकन करते समय हमें इस तथ्य को ध्यान में रखना चाहिए।

(2) मैलिनोव्स्की के विचार एवं कार्य का मूल्यांकन आज की दृष्टि से नहीं अपितु इतिहास-परंपरा की दृष्टि से करना चाहिए।

इन बिन्दुओं के परिप्रेक्ष्य में मैलिनोव्स्की का महत्व यह है कि उन्होंने सर्वेक्षण कार्य करते समय विवेच्य क्षेत्र में रहने वाली प्रजाति की भाषा का प्रयोग करने पर बल दिया। उनका प्रभाव ब्रिटिश भाषावैज्ञानिक फर्थ[4] के 'अर्थ-सिदुधांत' पर पड़ा है। स्वयं फर्थ ने भाषा-विज्ञान पर उनके प्रभाव को इस प्रकार अभिव्यक्त किया है—

'उनको ब्रिटिश भाषाविज्ञान के निर्माताओं में से एक मानते हुए हमें गर्व है। [4]

प्रोफेसर फर्थ (1890-1960) लन्दन विश्वविद्यालय के स्कूल आफ ओरियन्टल तथा अफ्रीकन स्टडीज में समान्य भाषाविज्ञान पीठ के प्रथम प्रोफेसर थे। उन्होंने भाषा विज्ञान तथा मानव विज्ञान दोनों क्षेत्रों में व्यवस्था एवं संरचना के सूत्रों की व्याख्या की है।[5]

(2) **स्विस एवं फ्रांसीसी परंपरा**-इस परंपरा के प्रवर्तकों में भाषावैज्ञानिक सोस्यूर (1857-1913)[6] एवं मेये (1966-1936) [7], समाजवैज्ञानिक दुर्खीम (1858-1917) के नाम प्रसिद्ध हैं।[8]

इनमें सोस्यूर स्विस हैं। मेये तथा दुर्खीम फ्रांसीसी हैं। सोस्यूर पैरिस में 1881 से 1891 तक भाषाविज्ञान के प्राध्यापक रहे। यहीं मेये इनके शिष्य बने।

सोस्यूर दुवारा समकालिक भाषाविज्ञान के महत्व तथा भाषा एवं वाक् के अंतर की संकल्पना का प्रभाव भाषाविज्ञान के साथ-साथ मानवविज्ञान पर भी पड़ा है। मेये अर्थ परिवर्तन की व्याख्या के लिए समाज के स्तरीकरण का अध्ययन आवश्यक मानते हैं। एमाइल दुर्खीम ने भाषाविज्ञान को समाजविज्ञान की दृष्टि से परिभाषित किया है। इनकी दृष्टि में भाषाविज्ञान का उदुदेश्य 'सामाजिक तथ्यों का संग्रह' करना है। इनकी मान्यता है कि सामाजिक तथ्यों की व्याख्या मनोविज्ञान के संदर्भ में नहीं की जा

सकती। समाज में भाषा व्यक्ति के जन्म के पहले से विद्यमान रहती है तथा व्यक्ति की मृत्यु के बाद भी बनी रहती है। व्यक्ति समाज में रहकर उसी प्रकार बोलना सीखता है जैसे उसके पूर्वजों ने सीखा था और जैसे उसके वंशज सीखेंगे। यह एक सामाजिक तथ्य है। प्रत्येक सामाजिक तथ्य की तीन विशेषताएँ होती हैं---

- सर्वसामान्यता,
- संचरणशीलता,
- बाध्यता।

किसी भी समाज के सभी सदस्यों में सामान्यतः समान आदतें, प्रथायें, भाषा, नैतिकता आदि होती हैं। इन सबसे मिलकर 'सामाजिक-संरचना' का निर्माण होता है जो अपेक्षाकृत स्थायी होता है। इसके अंश एक पीढ़ी दूसरी पीढ़ी को सौंपती जाती है। इस समूची संरचना में व्यक्ति केवल यात्रा करता है। सामाजिक-सरंचना व्यक्ति के जन्म के साथ पैदा नहीं होती, व्यक्ति की मृत्यु के साथ समाप्त नहीं होती। इसका कारण यह है कि सामाजिक-संरचना का आधार मानसिक नहीं है। यह एक सामाजिक व्यवस्था है। इसकी अपनी सामूहिक चेतना होती है। यह चेतना व्यक्ति की चेतना से भिन्न होती है।

सोस्यूर तथा दुर्खीम के अध्ययन-क्षेत्र भिन्न हैं, किंतु इनके विचारों का उत्स समान प्रतीत होता है। सोस्यूर के क्रांतिकारी विचारों के कारण उन्हें 'संरचनात्मक-भाषाविज्ञान' का जन्मदाता माना जाता है। 'समाज का वर्णनात्मक विवरण' प्रस्तुत करने के स्थान पर 'समाज की संरचना' को स्पष्ट करने पर बल देने के कारण सामाजिक-मानवविज्ञान में दुर्खीम का योगदान अप्रतिम है।

(3) **अमेरिकी परंपरा**—इस परंपरा का आरंभ करने वाले विद्वानों में डैनियल गैरिसन ब्रिन्टन, व्हिटनी, हाले, पावेल, बारटन, गिब्बस, बोआस आदि के नाम लिंए जा सकते हैं। इनमें सर्वाधिक उल्लेखनीय नाम फ्रेंज बोआस (1858-1942) का है। ये मूलतः मानववैज्ञानिक थे। भाषाविज्ञान के विद्यार्थी भी इनके योगदान से सुपरिचित हैं। अमेरिका में मानवविज्ञान संबंधी सर्वेक्षण-कार्य का आरंभ बोआस द्वारा बैफिल्लैंड और कोलम्बिया (दक्षिण-अमेरिका) की शोधयात्रा से माना जाता है। बोआस का अधिकांश जीवन अमेरिका के आदिम समाजों की संस्कृति के अध्ययन में व्यतीत हुआ। इनका विचार है कि भाषा संस्कृति की महत्वपूर्ण प्रतिनिधि है। 'भाषायें अपने बोलने वालों के विचारों और प्रथाओं में प्रतिबिंबित होती हैं।[9] बोआस ने मानवजाति-विज्ञान में भाषाविज्ञान की सैद्धांतिक एवं व्यावहारिक भूमिका का प्रतिपादन किया है।[10] 'हैंडबुक आफ अमेरिका इंडियन लैंग्वेजेज' प्रथम खंड की भूमिका लिखकर 'अमेरिकी वर्णनात्मक भाषाविज्ञान संप्रदाय' की आधारशिला रखने का श्रेय इन्हें प्राप्त है।[11]

वर्णनात्मक-भाषाविज्ञान में विश्लेषण की तकनीकों को प्रारम्भ करने की दृष्टि से प्रोफेसर बोआस तथा उनके शिष्य सपीर का सर्वाधिक महत्व है।[12] ये मानवविज्ञान में संस्कृति इतिहास सम्प्रदाय के प्रवर्तक[13] के रूप में प्रसिद्ध हैं। इनका आग्रह है कि मानवीय-व्यवहार मूलतः विभिन्न सांस्कृतिक अनुभवों की उपज है।

बोआस ने अनेक छात्रों को आदिम समाजों के क्षेत्रों में जाकर अध्ययन करने के लिए प्रेरित किया। उनमें रूथ एफ० वेनडिक्ट (1887-1948), अल्फ्रेड लुई क्रोबर (1876-1960) तथा सपीर (1884-1939) सर्वाधिक प्रसिद्ध हैं।

बेनडिक्ट की स्थापना है कि संस्कृति व्यक्तित्व को निश्चित दिशा एवं स्वरूप प्रदान करती है। बच्चा जिस क्षण से बोलना आरम्भ करता है, उसी क्षण से वह अपनी संस्कृति का 'एक छोटा प्राणी' बन जाता है।[14]

क्रोबर की मान्यता है कि मनुष्य के अवयवों के उद्‌विकास के दौरान उसके मस्तिष्क का उत्तरोत्तर विकास हुआ। मनुष्य की शरीर रचना में कुछ विशिष्ट परिवर्तन हुए। अवयवों के उद्‌विकास से प्राप्त क्षमताओं के सम्मिलित उपयोग से मनुष्य ने जटिल संस्कृतियों का विकास किया है। संस्कृति का आधार अवयवों का विकास है। इतना होने पर भी 'संस्कृति' अवयवों के विकास से बढ़ कर है। अवयवों के विकास का आधार 'जीववैज्ञानिक क्षमता' है। संस्कृति के विकास का आधार 'सांस्कृतिक क्षमता है' है। भाषा भी संस्कृति का अंग है। भाषा एवं संस्कृति दोनों की प्रकृति समान है। भाषा बोलने की क्षमता अवयवों के कारण है। भाषा की ध्वनियों का उच्चारण मनुष्य करता है। वक्ता द्‌वारा उच्चरित ध्वनियाँ श्रोता के कानों तक पहुँचती हैं। ध्वनियों से उत्पन्न अर्थ का बोध व्यक्ति को होता है। इसी के साथ यह भी तथ्य है कि कोई भाषा एक दिन में नहीं बनती, मानव समूह द्‌वारा अनेक शताब्दियों तक संयुक्त प्रयत्न करने के बाद बनती है। कोई एक व्यक्ति भाषा का निर्माण या विकास नही करता। वह भाषा को उसी रूप में बोलता है, जिस रूप में उसे बड़े-बूढ़ों तथा साथियों से प्राप्त होती है। वह भाषा में कुछ नयी चीजें जोड़ सकता है मगर 'भाषा-निर्माता' होने पर दावा नहीं कर सकता। भाषा बोलने का गुण आनुवंशिक कारण से प्राप्त नहीं होता, अपने समाज से प्राप्त होता है।[15] हेम्स ने एक लेख में क्रोबर के मानवजातिविज्ञान एवं भाषाविज्ञान सम्बन्धी कार्यों की विशद एवं सारगर्भित विवेचना की है। [16]

सपीर ने सन् 1905 से 1910 तक अमेरिका में केलिफोर्निया तथा पेन्सिलवानिया विश्वविद्यालयों के मानव-विभाग में कार्य किया। ये सन् 1911 में ओटावा (कनाडा) में मानवविज्ञान के निर्देशक के रूप में गये। इन्होंने वहाँ के कार्यकाल में अमेरिकी-इंडियनों के अथबस्कन वर्ग की भाषाओं पर कार्य किया। वहाँ से अमेरिका लौटकर इन्होंने शिकागो तथा येल विश्वविद्यालयों में कार्य किया। अमेरिकी-इण्डियन भाषाओं का वर्णनात्मक पद्धति से अध्ययन प्रस्तुत कर, इन्होंने भाषाविज्ञान को नयी दिशा दी। [17] सैद्धान्तिक दृष्टि से इन्होंने सामाजिक जीवन में भाषा की गतिशीलता तथा भाषा की अभिरचना के महत्त्व पर बल दिया है।[18]

इनके शिष्यों में बेंजामिन ली व्होर्फ (1897-1941) विशेष चर्चित हैं। येल विश्वविद्‌यालय में ये सपीर के शिष्य बने। इन्होंने अमेरिकी-इंडियन वर्ग की एरिजोना की 'होपी' तथा मैक्सिकी की 'नहुअत्ल' या 'अज्तेक' भाषाओं का सूक्ष्म अध्ययन किया। सैद्धांतिक दृष्टि से व्होर्फ ने 'भाषिक-सापेक्षता' के सिद्‌धांत का प्रतिपादन किया है। भाषाविज्ञान में 'सपीर-व्होर्फ' उपकल्पना प्रसिद्ध है।

अमेरिका में दोनों अध्ययन-विषय अधिक सम्बद्ध रहे हैं। विद्वानों की परम्परा के अतिरिक्त यहाँ के अधिकांश विश्वविद्यालयों एवं संस्थानों में 'भाषाविज्ञान' एवं मानव विज्ञान के संयुक्त अध्ययन-विभाग रहे हैं।

भाषाविज्ञान : मानवविज्ञान के लिए सहायक

(1) **सर्वेक्षण कार्य**–मानववैज्ञानिक 'संस्कृति-क्षेत्र' में जाकर सर्वेक्षण करता है। संस्कृति-क्षेत्र में प्रयुक्त भाषा के प्रयोग से शोधकर्ता सूचकों से निकटता प्राप्त करता है, संस्कृति के आन्तरिक पक्षों को समझता है। मानवविज्ञान के विद्वानों की एक परम्परा किसी जनजाति की संस्कृति को समझने के लिए उसके भाषा ज्ञान को अनिवार्य मानती है। 'जान-जाति की भाषा के माध्यम से शोधकर्ता को क्षेत्र में जाकर स्वयं कार्य करना चाहिए'–यह एक स्वीकृत आदर्श स्थिति है। व्यवहार में शोधकर्ता आदिम एवं वन्य जनजाति की भाषा से अनभिज्ञ होता है। वह अपना कार्य 'द्विभाषी व्यक्ति' की सहायता से सम्पन्न करता है। द्विभाषी-व्यक्ति जनजाति की भाषा के शब्दों का उसकी भाषा में अनुवाद करता है।

भाषाविज्ञान इस संदर्भ में मानववैज्ञानिक की दो प्रकार से बहुत अधिक सहायता करता है–

(i) भाषाविज्ञान जनजातियों की भाषाओं का अध्ययन करता है। मानववैज्ञानिक इनसे लाभान्वित होते हैं।

(ii) भाषाविज्ञान ने मानवविज्ञान को यह दृष्टि प्रदान की है कि सांस्कृतिक शब्दों के पूर्ण पर्याय नहीं होते। संस्कृति के शब्दों को 'शब्द अनुवाद' के माध्यम से समझना दुष्कर है। मानववैज्ञानिक पहले जन-जाति की भाषा के शब्द का अपनी भाषा में पर्याय प्राप्त कर संतुष्ट हो जाता था। अब वह सांस्कृतिक शब्दों की पूर्ण व्याख्या प्राप्त करता है। विवेच्य जन-जाति की भिन्न सामाजिक व्यवस्था, पर्व, धार्मिक अनुष्ठान, प्रथा, रीति, विश्वास, मूल्य एवं अभिवृत्ति द्योतक शब्दों के साथ जुड़े हुए सांस्कृतिक तथा परिवेशगत संदर्भों को समझने का प्रयास करता है।

(2) **सांस्कृतिक-क्षेत्र : समकालिक अध्ययन**–एक संस्कृति के तत्व या संकुल जिस भौगोलिक क्षेत्र में प्राप्त होते हैं वह एक 'सास्कृतिक-क्षेत्र' कहलाता है। जहाँ दो या अधिक पृथक संस्कृतियों के विलयन के फलस्वरूप नई संस्कृति विकसित हो जाती है वह 'सास्कृतिक-मिश्रण-क्षेत्र' कहलाता है। प्रत्येक संस्कृति-क्षेत्र का एक 'केंद्रीय-भाग' या 'केंद्रीय क्षेत्र' होता है। सांस्कृतिक तत्व यहाँ से अन्य केंद्रों में फैलते हैं। इसके बिलकुल भिन्न स्थिति 'अवशिष्ट क्षेत्र' की होती है। यहाँ अपेक्षाकृत पुरातन सांस्कृतिक तत्व अपने विशिष्ट रूप में सुरक्षित रहते हैं।

'सांस्कृतिक क्षेत्र' की अवधारणा को सर्वप्रथम सैद्धांतिक रूप प्रयुक्त करने का श्रेय 'सपीर' को है। 'सास्कृतिक-क्षेत्र' सम्बन्धी अध्ययन 'भाषा भूगोल' की पद्धतियों के समानान्तर किया जा सकता है।

भाषाविज्ञान के विद्यार्थी जानते हैं कि भाषा-भूगोल में 'भाषा क्षेत्र में भाषिक तत्वों के क्षेत्रीय-वितरण का वैज्ञानिक एवं वस्तुपरक अध्ययन किया जाता है। एक भाषा-क्षेत्र को अनेक केन्द्रों में बाँटा जाता है। प्रत्येक भाषिक-रूप के वितरण का अध्ययन 'समभाषांश-रेखा' के द्वारा किया जाता है। इन समभाषांश-रेखाओं से शब्द, उच्चारण-भेद, रूपग्राम के सदस्यों के वैकल्पिक प्रयोग आदि के क्षेत्रीय वितरण का पता चला जाता है।

विभिन्न भाषिक रूपों की समभाषांश रेखाओं से दो भाषाओं अथवा एक भाषा की एकाधिक बोलियों के 'संक्रांति-क्षेत्र' का पता चलता है। 'संक्रान्ति क्षेत्र' में 'समभाषांश रेखा समूह' घटित होता है। 'अवशिष्ट-क्षेत्र' के चारों ओर से समभाषांश रेखायें निकल जाती हैं। 'केंद्रीय क्षेत्र' में समभाषांश रेखायें समान या असमान दूरी के साथ 'गुच्छ रूप' में आती हैं।

इसी विधि से संस्कृति-क्षेत्र के मानचित्र में संस्कृति तत्वों की समरूप-सीमा-रेखाओं का अंकन करके महत्वपूर्ण कार्य किया जा सकता है।

(3) **अभौतिक संस्कृति**–मूर्त को भाषा के बिना जाना जा सकता है। अमूर्त को जानने के लिए भाषा का सहारा लेना पड़ता है। किसी जन-जाति के आदर्श, विचार, चिन्तन, मूल्य आदि का प्रामाणिक अध्ययन भाषा के आलोक में ही सम्भव है। इस दृष्टि से बेंजामिन ली व्होर्फ की मान्यता है कि कोई जन-जाति कैसे और क्या सोचती है–इस विषय में भाषाविज्ञान से बहुत कुछ प्राप्त हो सकता है। उन्होंने आदिम समाजों के चिन्तन-पक्ष को जानने के लिए भाषिक विवेचन के महत्व का प्रतिपादन किया है उनके समय के मानव वैज्ञानिक आदिम समाज के चिंतन पक्ष का मनोविज्ञान की समस्या मानते थे। इस कारण उसका विवेचन नहीं करते थे। वे सरलतापूर्वक निरीक्षण किए जा सकने वाले पदार्थों का ही अध्ययन करते थे। व्होर्फ ने प्रतिपादित किया कि आदिम समाज में विचार तथा चिन्तन के अध्ययन की समस्या केवल मनोवैज्ञानिक नहीं है। यह समस्या मानववैज्ञानिक अधिक है। भाषाविज्ञान की सहायता से इस समस्या के समाधान के प्रेवश-द्वार तक पहुँच सकते हैं। जिस प्रकार के भाषाविज्ञान से समस्या का समाधान सम्भव है, उस प्रकार के भाषाविज्ञान की आधारशिला बोआस ने रखी। इस दृष्टि से 'हैण्डबुक आफ अमेरिकन इंडियन लैंग्वेजेज' शीर्षक ग्रन्थ की उनके द्वारा लिखी हुई "भूमिका" उल्लेखनीय है।[19] सपीर तथा ब्लूमफील्ड आदि भाषावैज्ञानिकों ने उसका विकास किया।

व्होर्फ के अनुसार भाषाविज्ञान मानव संबंधी विज्ञानों के विश्लेषण का आधार है। सामान्य व्यक्ति को भाषाविज्ञान, ध्वनियों के भेदक रूपों का अध्ययन करते समय 'बाल की खाल निकालने में व्यस्त' तथा रूपग्रामिक अध्ययन करते समय 'जटिल व्याकरण लिखता हुआ' प्रतीत हो सकता है। भाषाविज्ञान का वास्तविक उद्देश्य भाषा के गहन अंधकार को प्रकाशित करना है, किसी मानव-समाज के चिंतन, संस्कृति तथा जीवन-दृष्टिकोण को 'अर्थ-तत्व' के द्वारा आलोकित करना है।[20]

(4) **मानव-जाति का भाषा-सापेक्ष चिंतन**–भाषा विचारों की अभिव्यक्ति करती है– यह एक सामान्य मान्यता है। कुछ विद्वानों की मान्यता है कि भाषा विचारों को रूप प्रदान करती है। विभिन्न भाषाओं को बोलने वाले संसार को भिन्न प्रकार से देखते हैं। चिंतन सीखी गयी भाषा से सापेक्ष होता है। चिंतन के ऊँचे स्तर भाषा पर आश्रित होते हैं। भाषाविज्ञान में यह सिद्धांत विश्व स्वरूप (world-view)

तथा भाषिक-सापेक्षता (Linguistic relativity) के नाम से प्रसिद्ध है। इस सिद्धांत के अनुसार किसी भाषा की अभिरचनाएँ यह निर्धारित करती हैं कि कोई व्यक्ति विश्व को किस प्रकार देखेगा तथा विश्व के संबंध में किस प्रकार चिंतन करेगा। इस कारण भिन्न भाषाओं को बोलने वाले संसार के पदार्थों को (भाषा-सापेक्ष दृष्टि से देखने के कारण) भिन्न प्रकार से देखते हैं, उनका विश्व-स्वत्रप' भिन्न होता है। अपनी भाषिक पृष्ठभूमियों की भिन्नता के कारण वे भौतिक विश्व का वही रूप नहीं देख पाते। यही 'भाषिक सापेक्षता' है।

(5) सामाजिक संगठन एवं नाते रिश्तेदारी की व्यवस्था–मानवविज्ञान की अमेरिकी परंपरा ने सामाजिक संगठन और प्रक्रियाओं के अध्ययन पर बल दिया है। सामाजिक संगठन उन संस्थाओं या समितियों को व्यक्त करता है जो समाज में स्त्री और पुरुष की स्थिति निर्धारित करती हैं। सामाजिक संगठन का अध्ययन करते समय संस्थाओं को दो प्रमुख वर्गों में बाँटा जाता है :

(i) रिश्तेदारी-व्यवस्था से उत्पन्न : (यथा-परिवार, वंश, गोत्र)

(ii) व्यक्तियों के स्वतंत्र मेल-जोल से उत्पन्न समितियाँ : (यथा-वर्ग, जाति, आयु-समूह)

भाषाविज्ञान में विभिन्न संस्थाओं एवं समितियों के 'पारस्परिक संबंध' एवं 'व्यवहार- प्रतिमानों' को व्यक्त करने वाली शब्दावली का विवेचन किया जाता है। इसके अध्ययन से सामाजिक-संगठन को वस्तुपरक रूप में विश्लेषित किया जा सकता है।

'किसी भाषा में रिश्ते-नातों की शब्दावली', 'व्यक्तिवाची उपनाम' तथा 'सम्बोधन की शब्दावली के अध्ययन से पारिवारिक-व्यवस्था तथा व्यवहार-प्रतिमानों का प्रामाणिक विवेचन संभव है। कुछ भाषाओं में प्रत्येक रिश्ते के लिए भिन्न शब्द की योजना होती है। उदाहरण के लिए हिंदी में पति, पत्नी, माता, पिता, भाई, भाभी, बहन, जीजा, लड़का, बहू या पुत्रवधू, दामाद, साला, साली, सलहज, साढू, जेठ, देवर, जेठानी, ननद, नन्दोई, ताऊ, ताई, चाचा, चाची, फूफा, बुआ, मामा, मामी, मौसा, मौसी आदि प्रत्येक शब्द एक विशिष्ट संबंध का बोध कराता है। बहुत सी भाषाओं में रिश्ते-नातों के 'वर्ग' या 'श्रेणी' के लिए एक शब्द का प्रयोग होता है। 'कराडजेरी समाज' 'ताबुलू' शब्द का प्रयोग 'पिता चाचा, ताऊ सबके लिए होता है। 'सेमा नागा' में 'अजा' शब्द का प्रयोग माता, चाची, ताई तथा मौसी के लिए होता है। 'कूकी समाज' में 'हेपू' का प्रयोग पिता के पिता (बाबा : दादा), माता के पिता (नाना), माता के भाई (मामा), पत्नी के पिता (ससुर), मामा के पुत्र (ममेरा भाई), पत्नी के भाई (साला), पत्नी के भाई के लड़के आदि संबंधों के लिए होता है।[21] अंग्रजी में 'अंकल' शब्द का प्रयोग पिता के छोटे भाई (चाचा), पिता के बड़े भाई (ताऊ), माता के भाई (मामा), पिता की बहन के पति (फूफा), माता की बहन के पति (मौसा) आदि समस्त संबंधों के लिए होता है। (हिंदी में तो 'अंकल' शब्द का प्रयोग-क्षेत्र अत्यन्त विस्तृत हो गया है। यहाँ यह केवल रिश्ता-नाम नहीं है। सामाजिक धरातल पर पिता की आयु के आसपास के प्रत्येक व्यक्ति को 'अंकल' कहकर पुकारा जाने लगा है)। इस प्रकार 'कज़िन' शब्द का प्रयोग ताऊ, चाचा, मामा, फूफा, मौसा इन सबके लड़कों एवं लड़कियों के लिए होता है। अंग्रेजी के 'कज़िन' शब्द से रिश्तों के जिस वर्ग का बोध होता है उसके

द्योतन के लिए हिंदी में चचेरा भाई, चचेरी बहन, ममेरा भाई, ममेरी बहन, मौसेरा भाई, मौसेरी बहन, फूफेरा भाई, फूफेरी बहन शब्द प्रचलित हैं। शब्दों के अध्ययन से सामाजिक संगठन तथा नाते-रिश्तेदारी की व्यवस्था को प्रामाणिक रूप में जाना जा सकता है।

(6) **प्राक्-इतिहास**-पुरातत्व के अध्ययन का आधार जमीन की खुदाई से प्राप्त 'भौतिक अवशेष' हैं। इससे प्राचीन विवेच्य संस्कृति से सम्बन्धित कोई लिखित प्रमाण नहीं होता। भाषाविज्ञान पारिवारिक दृष्टि से सम्बद्ध भाषाओं अथवा एक भाषा की बोलियों के शब्द, रूप, ध्वनि आदि का तुलनात्मक अध्ययन करता है, तुलनात्मक अध्ययन से प्राप्त निष्कर्षों के आधार पर 'मूल भाषा' के विविध अज्ञात भाषिक रूपों का पुनर्निर्माण करता है। इस अध्ययन का यह आधार है कि भाषा के प्राचीन रूपों के कुछ चिह्न सदैव शेष रह जाते हैं। मान लीजिए किसी भाषा के प्राचीन लिखित साहित्य में किसी एक शब्द का एक ही रूप प्राप्त है, मगर उस भाषा की परवर्ती स्थितियों में उस शब्द के भिन्न रूप प्राप्त हैं। ऐसी स्थिति में 'पुनर्निर्माण शास्त्र' प्राप्त विभिन्न रूपों के आधार पर ज्ञात से अज्ञात का संधान करता है।

भाषा रूपों के पूनर्निर्माण के अध्ययन से प्राक्-ऐतिहासिक संस्कृति का अन्वेषण किया जाता है। उदाहरण के लिए भाषावैज्ञानिकों ने भारोपीय परिवार की विविध शाखाओं की भाषाओं के तुलनात्मक अध्ययन द्वारा ज्ञात से अज्ञात रूपों की खोज की है। इस विधि से द्वारा 'आदि भारोपीय भाषा' का निर्माण संभव हो सका है।

इस अध्ययन के आधार पर आर्यों के मूल स्थान तथा उनकी संस्कृति के आदि-स्वरूप के संबंध में कार्य हुए हैं।

(7) **संस्कृति : ऐतिहासिक एवं तुलनात्मक अध्ययन**-भाषाओं के 'पारिवारिक वर्गीकरण' तथा भाषा-परिवारों की 'आदि भाषाओं के पुनर्निर्माण' के अध्ययन से विभिन्न प्रजातियों के मूलस्थान तथा उनके वर्गीकरण आदि के संबंध में नए सिरे से काम किया जा सकता है।

भाषाओं के विकासात्मक तथा तुलनात्मक अध्ययन से प्रजाति की विभिन्न शाखाओं के गमन, संस्कृति-प्रसार, संस्कृतिकरण आदि के संबंध से प्रामाणिक जानकारी प्राप्त होती है।

प्रजाति की जब एक शाखा अपने मूल स्थान से हटकर दूसरे स्थान पर गमन करती है तो भिन्न जन-जातियों के बीच सामाजिक-सांस्कृतिक संपर्क होता है। एक सांस्कृतिक समूह से दूसरे सांस्कृतिक समूह में सांस्कृतिक तत्त्वों तथा सांस्कृतिक संकुलों का विस्तार होता है। 'संस्कृति-प्रसार' से एक सांस्कृतिक समूह की संपूर्ण जीवन-रीति में परिवर्तन की प्रक्रिया आरंभ हो सकती है। इसे 'संस्कृतिकरण' कहते हैं। आगत शब्दावली एवं अन्य भाषिक तत्वों के आदान के अध्ययन से संस्कृति-परिवर्तन का वस्तुपरक अध्ययन संभव है। भिन्न भाषा परिवारों के भाषाओं की भाषिक समानता उनके बोलने वालों के बीच सांस्कृतिक आदान-प्रदान का प्रमाण होती हैं। उदाहरण के रूप में नव्यतर आर्य भाषाओं एवं द्रविड़ भाषाओं में भाषिक रूपों की समानता मिलती है।

शब्दावली की समानता के कुछ उदाहरण

हिंदी	कन्नड़	तेलुगु	मलयालम	तमिल
अहंकार	अहंकार	अहंकारमु	अहंकारम्	अकंकारम्
अकाल	अकाल	अकालमु	अकालम्	अकालम्
अंग	अंग	अंगमु	अंगम्	अंकम्
अंजलि	आंजलि	अंजलि	अंजलि	अंजलि
अणु	अणु	अणुवु	अणु	अणु
अर्चना	अर्चने	अर्चनमु	आर्च्चना	अरुच्चनै
अवतार	अवतार	अवतारमु	अवतारम्	अवतारम्
इन्द्र	इन्दु	इंद्रुडु	इन्द्रन	इन्तु
दीप	दीप	दीपमु	दीपम्	तीपम्
मणि	मणि	मणि	मणि	मणि
टोपी	टोप्पि	टोपि	तोप्पि	तोप्पि

इस प्रकार की शब्दावली हिंदी एवं द्रविड़ भाषाओं के बोलने वाले मानव समूहों की संस्कृतियों पर संस्कृत की वैदिक तथा अरबी-फारसी की इस्लामी संस्कृति के प्रभाव का प्रमाण है। इसी प्रकार संपूर्ण भारतीय भाषाओं में अरबी, फारसी, अंग्रजी आदि भाषाओं से 'आगत शब्दावली' तथा आगत शब्दों के भाषावैज्ञानिक विवेचन से भारतीय सांस्कृतिक परिवर्तन को वस्तुगत दृष्टि से पहचाना जा सकता है।

हिन्दी में अरबी, फारसी एवम् तुर्की से बहुत से ऐसे शब्दों का आदान हुआ है जिनके हिंदी भाषा में पर्याय नहीं हैं। कागज, कागजात, कागजी शब्दों की आगत विवेचना से पता चलता है कि मुलसमानों ने भारत में कागज बनाने का प्रचार किया। मीनाकारी, नक्काशी, कसीदाकारी, रफूगीरी शब्दों से मुस्लिम शासन-काल में संबंधित कला-कौशलों के प्रचलन की जानकारी मिलती है। तुर्की से कालीन और गलीचा, अरबी से कुर्सी, तथा फारसी से मेज, तख्त शब्दों का आदान हुआ। इनसे संबंधित संस्कृतियों के सांस्कृतिक तत्त्वों के प्रसार की सूचना मिलती है। इसी प्रकार फारसी से जाम तथा अरबी से सुराही तथा साकी शब्दों का आदान 'सांस्कृतिक आदान' का सूचक है। कँगूरा, गुंबद, बुर्जी, मीनार आदि शब्द स्थापत्य-कला पर इस्लामी संस्कृति के प्रभाव के द्योतक हैं। कव्वाली, रुबाई, गज़ल शब्दों से संगीत की गायन-शैली तथा शहनाई एवं 'तबला' शब्दों से वाद्ययंत्रों के क्षेत्रों में सांस्कृतिक संकुल के विस्तार की संभावना का पता चलता है। इतिहास में तबला वाद्ययंत्र के आविष्कार के संबंध में यह मत प्रचलित है कि इसका आविष्कार अमीर खुसरो ने मृदंग को देखकर किया था। तबला

शब्द अरबी भाषा के तबलः का तद्भव रूप है। अरबी भाषा में 'तबलः' शब्द का प्रयोग अमीर खुसरो के भारत आगमन के पूर्व संबंधित वाद्ययंत्र के संदर्भ में मिलने की स्थिति में इतिहास को उपयुक्त मान्यता में परिवर्तन करना होना। कमीज, पाजामा, कुर्ता, चादर, दस्ताना, मोजा, शाल आदि शब्दों का प्रयोग वेश-भूषा के क्षेत्र में तथा मखमल और चिकन शब्दों का प्रयोग वस्त्र-प्रकार के क्षेत्र में सांस्कृतिक परिवर्तन का परिचायक है। काबुल और कंधार तथा बुखारा और समरकंद से भारत में मेवाओं तथा आलू बुखारा, खरबूजा, खुबानी, तरबूज, नाशपाती, सेब आदि फलों के नाम-शब्द आ गए तथा जन सामान्य में प्रचलित हो गए। मुस्लिम शासन के दौरान मध्य एशिया और ईरानी अमीरों के रीति-रिवाजों का अनुकरण करके भारत के सामन्त बड़ी-बड़ी दावतें देने लगे थे। दावतों में गुलाब जामुन, गज़क, बर्फी, बालूशाही, हलवा जैसी मिठाइयाँ परोसी जाने लगीं। खाने के साथ अचार का तथा पान के साथ गुलकंद का प्रयोग होने लगा। गर्मियों में शर्बत, मुरब्बा, कुल्फी का प्रचलन हो गया। निरामिष में पुलाव तथा सामिष में कबाब एवं कीमा दावत के अभिन्न अंग हो गए। सब्जी में आलू, चुकंदर, शलजम, लोबिया भारत की भूमि पर पैदा किए जाने लगे, फूलों में गुलाब उगाया जाने लगा। इस्लामी संस्कृति का प्रभाव शृंगार-प्रसाधन एवं मनोरंजन के साधनों पर भी पड़ा। इसका प्रमाण खस, इत्र, साबुन, खिजाब, सुर्मा, ताश, शतरंज आदि शब्दों का प्रयोग है।

(8) **अध्ययन पद्धति**–भाषाविज्ञान में कई महत्वपूर्ण विचार-प्रत्यय हैं जिनके आधार पर संस्कृति एवं मानव-व्यवहार का अध्ययन किया जा सकता है। उदाहरण के लिए 'वाक्' एवं 'भाषा' का अन्तर तथा भाषिक तत्व की रचना एवं उसके प्रकार्य का अंतर महत्वपूर्ण विचार प्रत्यय हैं। भाषाविज्ञान में भाषा-विश्लेषण की वैज्ञानिक एवं परीक्षणीय अध्ययन-पद्धतियों का विकास हुआ है। भाषा की व्यवस्था एवं संरचना भाषेतर संस्कृति के उपादानों पर आश्रित नहीं होती। इस कारण भाषाविज्ञान में 'अर्थ की चिंता' किए बिना भाषा के रूप या आकृति के विश्लेषण की वर्णनात्मक एवं संरचनात्मक पद्धतियों का विकास हो सका। भौतिक पदार्थों के रूप में उच्चरित ध्वनियों के किसी भाषा विशेष में वितरण' को आधार बनाकर, ध्वनिग्रामिक अध्ययन सम्पन्न हुए। ध्वनि की भौतिक सत्ता और उसके प्रकार्य में अंतर पहचाना गया। दो ध्वनियाँ एक भाषा में परस्पर परिपूरक-वितरण या मुक्त-परिवर्तन में वितरित होने के कारण अभेदक हो सकती हैं, वही ध्वनियाँ दूसरी भाषा में व्यतिरेकी होने के कारण भेदक हो सकती हैं अर्थात् उनका उस भाषा में व्यवच्छेदक महत्व हो सकता है। भाषिक तत्त्व की भौतिक सत्ता का 'एटिक' ('फोनेटिक' शब्द के आधार पर 'पाइक' द्वारा निर्मित='फोन +एटिक') दृष्टियों से अध्ययन करने की पद्धतियाँ विकसित हुई हैं। एक भाषा की विशिष्ट व्यवस्था एवं संरचना को स्पष्ट करने वाले व्याकरण-साँचों का निर्माण हुआ है। भाषा की संरचना में निहित नियमों को सूत्रों में बद्ध करने के मार्ग खोजे गए हैं। खोज की परिणतियाँ अधिकाधिक सुसम्बद्ध, संगत एवं उत्पादक होती गई हैं। पहले भाषा की संरचना को ध्वनि, रूप, वाक्य स्तरों पर पृथक रूप में विश्लेषित किया गया। तदनंतर उच्चार की मूल इकाई से वाक्य तक के पारस्परिक संबंधों को संबद्ध नियमों द्वारा स्पष्ट किया गया। पहले भाषा की बाह्य सरंचना का ही विश्लेषण किया गया। तदनंतर, भाषा की गहन संरचना को भी विश्लेषित किया गया। रूपान्तरण या रचनांतरण-व्याकरण भाषा की गहन संरचना को नियमबद्ध करता है। प्रजनक-व्याकरण इन नियमों की व्यवस्था करता है। 'स्थिति-संदर्भ सिद्धांत' अर्थ का गहन विवेचन

करता है–भाषा के समस्त स्तरों के संदर्भ में प्रकार्य के रूप में अर्थ का अध्ययन करता है। वाक्य की गहनतम संरचनाओं के प्रजनक अर्थ-वैज्ञानिक अध्ययन से 'सर्वभाषा व्याकरण' का नया दर्शन निर्मित हुआ है। चॉम्स्की ने प्रतिपादित किया है कि संसार भर की भाषाओं में कुछ समानतायें हैं। सर्वभाषा व्याकरण की व्यवस्था मानव-मस्तिष्क में जन्म से ही जैविकीय रूप में पूर्वयोजित होती है।

भाषाविज्ञान की इन पद्धतियों का मानवजाति विज्ञान या सामाजिक-मानवविज्ञान में सार्थक उपयोग किया जा सकता है :

(1) संस्कृति-क्षेत्र में रहने वाले व्यक्तियों की व्यवहार, रीति, प्रथा आदि के बारे में मानसिक अवधारणा होती है। व्यवहार में उनका प्रकटीकरण होता है। मानसिक अवधारणा एवं प्रकटीकरण के अन्तर का अध्ययन 'सोस्यूर' के 'भाषा' एवं 'वाक्' तथा 'चॉम्स्की' के 'सामर्थ्य' एवं 'निष्पादन' विचार-प्रत्ययों के समानांतर किया जा सकता है।

(2) एक संस्कृति-क्षेत्र के समस्त 'सांस्कृतिक तत्वों' एवं 'सांस्कृतिक संकुलों' का अध्ययन एक भाषा क्षेत्र के समस्त भाषिक रूपों की 'सर्वसमावेशी अभिरचना' के समानांतर किया जा सकता है।

(3) संस्कृति तत्वों के क्षेत्रगत वितरण, 'केंद्रीय संस्कृति-क्षेत्र' तथा 'अवशिष्ट-क्षेत्र' का निर्धारण भाषिक भूगोल की पद्धति के समानांतर किया जा सकता है।

(4) प्रत्येक व्यक्ति के संस्कृति-व्यवहार में यत्किंचित भिन्नताएँ होती हैं। संस्कृति-कोड के इन व्यक्तिपरिवर्तों अथवा 'व्यक्ति-संस्कृति' का अध्ययन 'व्यक्ति-बोली' के समानांतर किया जा सकता है।

(5) संस्कृति-क्षेत्र में सांस्कृतिक तत्वों, सांस्कृतिक संकुलों एवं व्यवहारों की व्यक्तिपरिवर्तों एवं उपसंस्कृति-परिवर्तों के अतिरिक्त कुछ सांस्कृति समानताएँ होती हैं। इसके आधार पर संस्कृति के 'केंद्रीय प्रतिमान' का स्वरूप स्पष्ट करने में सहायता मिलती है। इन समानताओं का अध्ययन किसी भाषा के 'समान कोड' की पद्धति के आधार पर किया जा सकता है। इसे 'संस्कृति-कोड' कह सकते हैं।

(6) दो भिन्न सांस्कृतिक-समाजों में सांस्कृतिक तत्व एक से हो सकते हैं मगर उनसे बनने वाले 'संस्कृति-प्रतिमान' समान नहीं होते। इसका कारण है – संस्कृति-तत्व एक से होते हुए भी उनके संगठन या विन्यास में उसी प्रकार अंतर होता है जिस प्रकार एक ही प्रकार की ईंट, सीमेंट आदि भौतिक पदार्थों से भिन्न डिजाइन के भवनों का निर्माण होता है। इस प्रकार 'संस्कृति-तत्व' तथा 'एमिक' दृष्टियों से किया जा सकता है। पाइक ने व्यवहार के 'एमिक-विश्लेषण' में घटनाओं की धारा का उसकी आंतरिक संरचना के संदर्भ में विश्लेषण करने के साथ-साथ मूल निवासी की व्यवहार के प्रति दृष्टि या अभिवृत्ति को समाहित करने पर भी बल दिया है। पाइक ने 'एटिक-विश्लेषण' का प्रयोग 'वर्णनात्मक संकेत' के अर्थ में किया है। इस विश्लेषण से समय शोधकर्ता संस्कृतियों के तुलनात्मक अध्ययन के आधार पर व्यवहार में दिखलाई देने वाले भिन्न सांस्कृतिक तत्वों का वर्णन करता है।[22]

(7) संस्कृति-कोड के निश्चित नियम होते हैं। व्यक्ति की सर्जनात्मक प्रतिभा के कारण व्यवहार में संस्कृति-कोड के अनंत प्रभेद संभव हैं। संस्कृति-कोड के नियम मुख्यतः मानव समूह के सदस्यों के अवचेतन में रहते हैं। हम उनसे यह अपेक्षा नहीं कर सकते कि वे इन नियमों को बता देंगे। भाषा के व्याकरण के नियमों के समानांतर इन नियमों का अध्ययन किया जा सकता है।

(8) संस्कृति-क्षेत्र के मानव समूह के सदस्यों के व्यवहारों में एक अनुक्रम होता है। भाषाविज्ञान के वाक्यविन्यासात्मक संबंधों के आधार पर 'मानव-व्यवहार और क्रिया-कलाप के विन्यास' का अध्ययन संभव है।

(9) वाक्य-संरचना के गहनतम स्तरों पर संसार भर की भाषाओं में समानताएँ हैं। इनमें ध्वनि, रूप, वाक्य, शब्द, अर्थ आदि तत्त्वों के संगठन की आधारगत समानता है। इसके आधार पर 'सर्वभाषा व्याकरण' की परिकल्पना की गयी है। इसी के समानांतर संसार भर की संस्कृतियों को संगठन की आधारभूत समानताओं को विश्लेषित करने की दिशा में सोचा जा सकता है।

मानवविज्ञान : भाषाविज्ञान के लिए सहायक

(1) **सर्वेक्षण कार्य**-पहले, भाषा सामग्री संकलित करने के लिए भाषावैज्ञानिक संबद्ध भाषा के बोलने वाले किसी व्यक्ति को अपने घर पर बुला लेता था। किसी एक व्यक्ति को सूचक बनाकर उससे भाषा-सामग्री प्राप्त करना पर्याप्त समझा जाता था। मानवविज्ञान के प्रभाव के कारण अब यह माना जाने लगा है कि भाषावैज्ञानिक को भाषा के क्षेत्र में स्वयं जाकर भाषा-सर्वेक्षण करना चाहिए। उसे भाषा-क्षेत्र में जाकर सूचकों से स्वाभाविक रूप से बातचीत करनी चाहिए। भाषा-क्षेत्र के स्वाभाविक परिवेश में सूचकों से अनौपचारिक बातचीत के दौरान भाषा के विशेष अभिलक्षण, संरचनाएँ, अनुतानात्मक विशेषताएँ, शैलीगत भिन्नताएँ प्रकट होती हैं। सांस्कृतिक अर्थ की दृष्टि से विशेष महत्व रखने वाले वाक्य, वाक्यांश, शब्द तथा उनके अर्थ अपने वास्तविक रूप में 'पकड़ में' आ जाते हैं।

संस्कृति के व्यापक अर्थ में भाषा संस्कृति का एक अंग है। इस कारण किसी भाषा के सर्वेक्षण के लिए उसकी संस्कृति को जानना आवश्यक है। इससे भाषा-सर्वेक्षण को अनेक लाभ होते हैं। प्रश्नावली-निर्माण में सहायता मिलती है। वह सूचकों से अनुकूल व्यवहार कर पाता है। भाषा को ठीक प्रकार समझ पाता है। आदिम समाजों की भाषाओं के सर्वेक्षण के लिए उनकी संस्कृति को जानना अपेक्षाकृत अधिक महत्वपूर्ण है।

(2) **भाषा-अध्ययन के प्रति व्यापक दृष्टिकोण**-सांस्कृतिक मानवविज्ञान विभिन्न मानव समूहों की संस्कृतियों का अध्ययन करता है। इस अध्ययन के अंतर्गत प्रजातियों के सामाजिक संगठन, राजनैतिक प्रणालियाँ, धर्म, कला, लोकवार्ता, लोक-नाट्य, लोक-संगीत, परंपरा, रीतिरिवाज, प्रथा, विश्वास आदि के साथ-साथ उनकी भाषा का भी विश्लेषण एवम् विवेचन किया जाता है। इस दृष्टि से 'भाषा' संस्कृति का एक अंग है।

भाषाविज्ञान भाषा को संस्कृति का एक अंग मात्र नहीं मानता। 'भाषाविज्ञान' स्वतंत्र तथा पूर्ण

विषय है। इतना होने पर भी यह तथ्य है कि मानवविज्ञान ने भाषा-वैज्ञानिक को भाषा-अध्ययन की व्यापक दृष्टि दी है। मैलिनोव्स्की के इस विचार का पहले उल्लेख किया जा चुका है कि 'भाषा का अध्ययन संस्कृति जो जाने बिना असंभव है'। भाषाविज्ञान अर्थ-पक्ष का अध्ययन करता है। इस दृष्टि से भाषावैज्ञानिक को विवेच्य भाषा के समाज की सांस्कृतिक चेतना को समझना चाहिए। भाषा को संस्कृति का प्रतिबिंब माना जाता है जो संस्कृति की आवश्यकताओं के अनुरूप विकसित होती है।[23] मानवविज्ञान, भाषा एवं संस्कृति की विभिन्न इकाइयाँ पृथक् होकर कार्य नहीं करतीं, मिलकर कार्य करती हैं। संपूर्ण सांस्कृतिक संरचना के अंतर्गत विभिन्न इकाइयाँ व्यवस्थित रूप से संबद्ध होती हैं। मानवविज्ञान ने किसी प्रजाति की भाषा का अध्ययन उसकी सांस्कृतिक पृष्ठभूमि में करने की प्रेरणा दी है। भाषावैज्ञानिक को भाषा के सभी पक्षों से परिचित होना चाहिए। बोलते समय केवल भाषिक तत्त्वों एवं रूपों का ही उच्चारण नहीं होता। हमारा अनुच्चारित-व्यवहार भाषा-अभिव्यक्ति को विशिष्ट अर्थ एवं भाव प्रदान करता है। मुख-मुद्राएँ, संकेत, भाव-प्रदर्शन हमारी वाणी को वास्तविक भाव-सत्ता प्रदान करते हैं। संस्कृति-निरपेक्ष रूप में भाषा का 'बोलना' तो सीखा जा सकता है मगर भाषा को 'जीने के लिए' संस्कृति को आत्मसात् करना पड़ता है। एक भाषा की संस्कृति को आत्मसात् कर लेने पर भाषा संदर्भ एवं परिस्थिति के अनुकूल ढलती जाती है। भाषा-विश्लेषण में 'अर्थ को बीच में न लाने' वाले दुराग्रह से संभवतः खिन्न होकर शिकागो में मार्च 53 में हुए सम्मेलन में क्रोबर ने समकालीन भाषावैज्ञानिकों को सचेत किया–

"संस्कृति एवं भाषिक संरचना के अंतर्संबंध एवं अंतर्क्रिया की बात करने के पहले हमें अर्थविज्ञान में अभिरुचि रखनी होगी।"[24]

कोई मानव समूह शून्य में यत्रा नहीं करता। वह अपने परिवेश में उगता है और संस्कृति में विकसित होता है। चॉम्स्की के 'भाषिक सामर्थ्य' के साथ-साथ 'संप्रेषणीय सामर्थ्य' के विचार-प्रत्यय में भी सत्यता है। 'भाषा' ही नहीं, हमें 'भाषा के संबंध में तथ्य' भी जानने चाहिए। 'भाषा के संबंध में तथ्य' से अभिप्राय भाषा की उन विशेषताओं से है जो तकनीकी-भावार्थ में भाषिक नहीं हैं मगर जिनके बिना समाज में एक व्यक्ति की 'संप्रेणषीय सामर्थ्य' क्षत-विक्षत हो जाती है। 'बात करना' तथा 'बात करने की कला' में अंतर है। जिसमें संप्रेषणीय सामर्थ्य है, वह जानता है कि भाषा समाज में किससे, कब, किस विषय पर, कैसे बातें करनी चाहिए। 'भाषिक सामर्थ्य' भाषा अर्जन की चेतना शक्ति का बीज है। 'संप्रेषणीय सामर्थ्य' उस बीज का फलना फूलना है।

(3) **अर्थविज्ञान** –किसी शब्द के पूरे अर्थ विवरण के लिए यह जानना आवश्यक है कि उस शब्द का प्रयोग जिस उच्चार में हुआ है वह कहाँ, किस परिस्थिति में, किसके द्वारा बोला जाता है। जिसके द्वारा बोला गया है, जहाँ बोला गया है, जिस समय बोला गया है, जिस वातावरण में बोला गया है–उनके सांस्कृतिक संदर्भ जानना जरूरी है। इसके शब्द की अर्थ-आत्मा को पहचाना जा सकता है। भाषा की सांस्कृतिक शब्दावली के पूरे विवरण को जानने के लिए 'संस्कृति' का ज्ञान अनिवार्य है। संस्कृति के वाहक शब्दों को संस्कृति के ही आलोक में पूरी तरह समझा जा सकता है।

भारतीय संस्कृति के अपरिचित व्यक्ति को 'चंदा मामा दूर के' शीर्षक लोकगीत सुनकर माँ का, बच्चे को खिलाते समय, बच्चे की ओर से 'चाँद' को 'मामा' कहना तथा स्वयं चाँद से भाई का रिश्ता जोड़ना अटपटा लग सकता है। प्रकृति से मानवीय संबंध जोड़ने की भारतीय मानसिकता को समझने के बाद ही इस लोकगीत का मर्म पहचाना जा सकता है। भारतीय समाज जन्म से मृत्यु तक के जीवन को 'संस्कारों' के रूप में देखता है। इस दृष्टि के कारण भारत की प्रत्येक भाषा के लोकगीतों में 'प्रसव गीत', 'सौर गीत या सोहरे', 'छठी गीत', 'विवाह गीत' आदि मिलते हैं। 'लाड़ी' या 'बन्नी' तथा 'घोड़ी' या 'बन्ना' शब्दों की अर्थवत्ता पश्चिमी उत्तर प्रदेश में वधू एवं वर-पक्षों के घरों में 'विवाह-गीतों' के संसार में भागीदार होने पर पूरी तरह समझ में आ जाती है। भारत की संयुक्त कुटुंब प्रणाली के गुण-दोष संबंधित लोकगीतों में अभिव्यक्त हैं। इनमें एक ओर माता-पुत्र, पिता-पुत्र, सास-दामाद, पति-पत्नी के बीच परस्पर संवादों में आत्मीय-अर्थबोधक शब्दों का प्रयोग मिलता है तो दूसरी ओर सास-बहू के संवादों में उनके पारस्परिक संघर्ष की मानसिक स्थिति को व्यक्त करने वाले शब्द मिलते हैं, ननद-भावज संवादों में व्यंग्य शब्दावली मिलती है तथा विधवा-जीवन को व्यक्त करने वाले गीतों में करुणा उपजाने वाले शब्दों का प्रयोग मिलता है।[25] जिस क्षेत्र में 'होली' नहीं खेली जाती, वहाँ के भाषा-भाषियों के लिए 'होली' अपरिचित शब्द है। इन्हें 'होली' का अर्थ समझाने के लिए होली त्यौहार के 'संकुल' को समझाना पड़ता है। 'रंग', 'गुलाल,' 'अबीर', 'गुजिया', 'फाग', 'रंग मलना', 'रंग फेंकना', आदि विविध शब्दों के अर्थ को जानने के लिए होली त्यौहार के बारे में जानना आवश्यक है। दिल्ली की 'पराँठो वाली गली' के व्युत्पत्तिपरक अर्थ को समझान के लिए पहले 'पराँठा' क्या है–इसे समझाना होगा। जिन क्षेत्रों में 'पराँठा' या 'पराँवठा' नहीं खाया जाता, उन क्षेत्रों के आदमी 'रोटी' या 'चपाती' का अर्थ तो समझते हैं मगर 'पराँठे' का अर्थ उन्हें विशेष प्रकार से समझाना पड़ता है। महानगरों में रहने वाले व्यक्ति को 'सूप', 'सूपा', 'डलियाँ', 'टोकनी' या 'टोकनियाँ, 'मथानी', 'मटका', 'मट्टक', 'खली', 'चूनी', 'सानी', 'खूंटा' आदि शब्द अपरिचित लग सकते हैं। ग्रामीण एवं वन्य समाज का व्यक्ति इन शब्दों का दैनिक जीवन में प्रयोग करता है। उसके लिए इस प्रकार के शब्द सुपरिचित होते हैं। हिंदी प्रदेश के गाँव की महिला के आभूषणों के वाचकों को जानने के लिए उन आभूषणों को जानना आवश्यक है। हिन्दीभाषी व्यक्ति माथे का टीका, बेंदी और कानों की बालियाँ, बुंदे, कर्ण फूल या कन्नफूल, गले का कंठा, हार, सतलड़ा आदि आभूषणों को जानता है। जो इन्हें जानता है उसे इन शब्दों का अर्थ ज्ञात होता है। जिस क्षेत्र का व्यक्ति इन आभूषणों से अपरिचित है, उसे इन आभूषणों के वाचक शब्दों का अर्थबोध कराते समय गहनों से सजी हुई वधू के सांस्कृतिक महत्व को समझाना होगा।

विश्व की परिचित प्रजातियों की भाषा के शब्दों का अर्थ-विवरण जानना आसान है। अपरिचित मानव-समूहों तथा विशेष रूप से आदिम प्रजातियों की भाषाओं के सांस्कृतिक शब्दों की अर्थ-विवेचना दुष्कर है। संस्कृति के ज्ञान की दीपशिखा से शब्द के अर्थ-गर्भ का अंधकार दूर हो जाता है। जिसने मध्य प्रदेश की आदिवासी महिला का कलात्मक गुदनों से सज्जित शरीर कभी नहीं देखा, वह 'गुदना' के भाव-प्रवण-बोध को नहीं जान सकता। मृत्यु के साथ नारी के शरीर का 'गुदना' जाता है। वैतरणी पार करते समय गुदने के चिह्न सारी यातनाओं से मुक्ति दिलाते हैं। गुदना सौन्दर्य-वृद्धि करता है।

अशरीरी बाधाओं से रक्षा करता है। जो युवती जितने सुन्दर ढंग से गुदना गुदवाती है उसे उतने ही युवकों का प्यार प्राप्त हो जाता है। गुदनों में सम्मोहन शक्ति होती है जो सहज ही प्रेमी युवक को आकर्षित करती है। अन्य सारे श्रृंगार तो मिथ्या हैं किन्तु गुदनों के स्थायी श्रृंगार से विवाह के उपरान्त पति और परिवार के बीच प्रेम व्याप्त रहता है।[26] गुदने से सम्बन्धित लोक-विश्वासों की पृष्ठभूमि में 'गुदना' का धार्मिक एवं सांस्कृतिक महत्व समझा जा सकता है। तदनन्तर, गुदना की चिन्हित आकृतियों के 'जातीय प्रतीकों' को पहचाना जा सकता है।

इस प्राकर विवेच्य भाषा के शब्दों के अर्थवैज्ञानिक अध्ययन में उसकी संस्कृति का ज्ञान सदैव सहायक है। इससे शब्दार्थ के महत्त्वपूर्ण पक्षों का गहन अध्ययन सम्भव है, 'प्रतीकात्मक संचार व्यवस्था' के रूप में विस्तृत विवेचन सम्भव है। शब्द का भाषा के भिन्न संदर्भों में अर्थ निरूपण की दृष्टि से फर्थ की 'अर्थ संकल्पना' महत्त्वपूर्ण है। इस पर मानववैज्ञानिक मैलिनोव्स्की का प्रभाव देखा जा सकता है। मैलिनोव्स्की ने स्थिति-संदर्भ का प्रयोग शब्द का पर्यावरण की सांस्कृतिक एवं भौतिक विशेषताओं के साथ सम्बन्ध बतलाने के लिए किया है। फर्थ ने अर्थ की विवेचना भाषा के सभी स्तरों के प्रकार्य के रूप में की है। उदाहरण के रूप में उन्होंने व्याकरणिक तत्त्वों के संदर्भ में 'व्याकरणिक अर्थ' की तथा ध्वनिग्रामिक तत्त्वों के संदर्भ में ध्वनिग्रामिक अर्थ की विवेचना की है। व्याकरणिक अर्थ व्याकरणिक तत्त्वों का प्रकार्य है। 'ध्वनि-ग्रामिक अर्थ' ध्वनि-ग्रामिक तत्त्वों का प्रकार्य है। मैलिनोव्स्की तथा फर्थ के विचारों में अन्तर अवश्य है मगर फर्थ की संकल्पना पर मैलिनोव्स्की के प्रभाव को नकारा नहीं जा सकता।

(4) **भाषा की संरचना एवं व्यवस्था के अर्थीय घटकों का अध्ययन**–भाषा की ध्वनि, व्याकरण तथा वाक्य व्यवस्था का संस्कृति से अन्तर्संबन्ध विवादास्पद है। कुछ विद्वानों ने इनमें महत्त्वपूर्ण सम्बन्ध माना है।[27] तत्वतः भाषा की सम्पूर्ण व्यवस्था एवं संरचना के अर्थीय घटकों के अध्ययन के लिए सम्बन्धित सांस्कृतिक तथ्यों की जानकारी अवश्य महत्त्वपूर्ण होती है।

एक विचार है कि भाषा की व्यवस्था एवं संरचना के अनुरूप बोलने वालों का चिन्तन एवं दृष्टिकोण निर्मित या निर्धारित होता है। दूसरा विचार है कि मानव समूह के चिन्तन एवं सांस्कृतिक-व्यवहार के अनुरूप भाषा की व्यवस्था एवं संरचना का निर्माण होता है। दोनों विचार अपने अतिरेक में सत्य नहीं हैं मगर दोनों में सत्य का अंश विद्यमान है। दोनों यह स्वीकार करते हैं कि भाषा की संरचना एवं व्यवस्था के अर्थीय घटकों का संस्कृति से सम्बन्ध होता है।

हिंदी में पुल्लिंग संज्ञा शब्दों में स्त्रीवाची प्रत्यय जोड़कर जब स्त्रीलिंग संज्ञा शब्दों का निर्माण किया जाता है तो उसमें 'स्त्रीलिंग' के अतिरिक्त सामान्यतः 'लघुता' का अतिरिक्त अर्थ आ जाता है। थाल, लोटा, डिब्बा, कटोरा, छुरा के आकार की अपेक्षा थाली, लुटिया, डिबिया, कटोरी, छुरी का आकार छोटा होता है। कंघा बड़ा होता है, कंघी छोटी होती है। रस्सा मोटा होता है, रस्सी पतली होती है। रास्ता में यात्रा करते समय छोटे से पुल को देखकर जब कोई कहता है कि 'यह पुल है' तो दूसरा व्यक्ति उसका प्रतिवाद करते हुए कह सकता है कि 'अरे ! यह पुल कहाँ है, यह तो पुलिया है। (यहाँ यह उल्लेखनीय है कि अधिकांश शब्दों में यह नियम घटित होता है मगर इसके अपवाद

भी हैं। 'डोरा' पतला होता है, 'डोरी' मोटी होती है।) स्त्रीलिंग शब्दों में जब 'इया' एवं 'इयाँ' परप्रत्ययों का योग होता है तो बनने वाले शब्दों के अर्थ में अतिरिक्त 'स्त्रैणता', कोमलता' तथा 'अपनत्व' का भाव आ जाता है। आँख, रात, बेटी, नींद, चोटी आदि स्त्रीलिंग शब्दों में 'इया' या 'इयाँ' परप्रत्ययों के योग से निर्मित शब्दों में ये भाव देखे जा सकते हैं। बेटी को लाड़ से बिटिया कहते हैं। इस दृष्टि से डॉ० बाबूराम सक्सेना का 'ड़िंदी में लिंग-भेद के द्वारा सूक्ष्म अर्थ-भेद का द्योतन' शीर्षक लेख द्रष्टव्य है।[28]

(5) **अनुवाद विज्ञान**-सांस्कृतिक दृष्टि से समान भाषाओं के परस्पर अनुवाद का कार्य अपेक्षाकृत सुकर होता है। सांस्कृतिक भिन्नताएँ जटिल समस्याएँ उत्पन्न कर देती हैं। नातेरिश्ते, सम्बोधन, रंग-द्योतक, विशिष्ट भौतिक पदार्थ, विशिष्ट व्यवसाय तथा धर्म, अर्थ, कला, शिल्प, विज्ञान, उद्योग आदि क्षेत्रों में विशिष्ट सांस्कृतिक पक्ष को व्यक्त करने वाली एवं वर्जित शब्दावली के अनुवाद में इन जटिलताओं को देखा जा सकता है। गालियों का अनुवाद करना बड़ा दुष्कर कार्य है। हिंदी प्रदेश में मित्रों के बीच परस्पर 'साले' शब्द का प्रयोग सम्बोधन के रूप में भी होता है। दूसरी भाषा में इसका पर्याय खोजना पड़ा कठिन काम है। यदि इस प्रसंग में कोई इसका अनुवाद 'Brother-in-law' करेगा तो हास्यास्पद हो जाएगा। 'आचमन', 'यज्ञ', 'हवन, 'पूजन-सामग्री' के पर्याय खोजना सम्भव नहीं है। 'लोक-तत्व' का अनुवाद करना 'लोहे के चने चबाना' है। इसके लिए अनुवाद-कार्य करने से पहले लोक-मानस को समझना पड़ता है। **प्रत्येक शब्द के साथ जुड़ी हुई लोक-कल्पना को आत्मसात करना पड़ता है।** लोक-जीवन में प्रचलित आलंकारिक प्रयोग एवं मिथक-तत्व भाषा की निजी सम्पत्ति हैं। 'मिथक' मानववैज्ञानिक दृष्टि से 'लोक-विश्वास के घोषणा-पत्र' हैं तथा मनोवैज्ञानिक दृष्टि से 'आदिम बिम्ब' हैं। मिथकों में मानव-समूह की भावनिर्माण-शक्ति अभिव्यक्त होती है। ये लोक-मानस की आन्तरिक यात्रा के चिनृहक हैं। एतदर्थ, लोक-मानस की सांस्कृतिक भाव-सम्पदा को जाने बिना इनका अनुवाद नहीं किया जा सकता।

मानवविज्ञान लोक-वर्ता का विवेचन करता है। लोक-गीत, लोक-कथा, लोक-गाथा, लोक-विश्वास सभी का अध्ययन करता है। हिंदी प्रदेश की लोक-कथाओं के अपने अभिप्राय हैं। 'एक राजा की सात रानियाँ, 'जादू का उड़न खटोला' , 'अभिशाप या जादू के कारण मनुष्य का पशु या पक्षी रूप हो जाना', 'राक्षस या डायन का जीव सात समुद्र पार स्थित द्वीप के किले में एक पिंजड़े में पक्षी के रूप में बन्द रहना' आदि अभिप्रायों को समझे बिना उनका अनुवाद नहीं किया जा सकता। आदिम प्रजातियों की लोक-गाथाओं के 'टोटेम' प्रसिद्ध हैं। मानव-समूह का अपने गोत्र का पशु, पक्षी या पदार्थ से जो गूढ़ सम्बन्ध इन टोटेमों में रहता है उसका शब्दशः अनुवाद नहीं किया जा सकता। **भारतीय सामाजिक जीवन के संस्कारों एवं लोक-विश्वासों से सम्बन्धित साहित्य एवं वार्ता के अनुवाद के लिए सम्बन्धित पक्षों को समझना आवश्यक है।** माँ अपने बच्चे को नजर से बचाने के लिए उसे 'डिठौना' लगाती है। 'डिठौना' का अनुवाद बिना इस लोक-विश्वास को समझे किस प्रकार किया जा सकता है? लोक-विश्वास एवं अभिप्राय के समानान्तर लिखित साहित्य की 'कवि-प्रसिद्धियों' के अनुवाद में भी इसी प्रकार की समस्या होती है। 'सूर्योदय के साथ कमल का खिलना', 'सूर्यास्त के बाद कमल का सम्पुटित होना', 'चकवा-चकवी का रात्रि में विछोह', 'हंस का नीर-क्षीर विवेक' आदि इसके उदाहरण

हैं। रंगों के साथ जब विशिष्ट भावतत्व जुड़ जाता है तब उस भाषा में रंग का नाम केवल 'रंग' तक सीमित होकर नहीं रह जाता। 'क्रोध में आँखें लाल हो गयीं', 'अपयश के कारण चेहरे पर कालिमा छा गयी'–इन वाक्यों में प्रयुक्त 'लाल' एवं 'कालिमा' का अनुवाद तभी सम्भव है जब अनुवादक यह समझ ले कि हिंदी-भाषा का लोक-मानस क्रोध एवं राग का रंग 'लाल' मानता है तथा अपयश एवं दुर्भाग्य का रंग 'काला' मानता है। 'लाली मेरे लाल की जित देखूँ तित लाल' जैसी पंक्ति का अनुवाद यदि लोक-मानस के साक्षात्कार के बिना किया जाएगा तो उसकी क्या स्थिति बनेगी इसे वह व्यक्ति भली प्रकार समझ सकता है जिसे अनुवाद कार्य का अनुभव है। इसी प्रकार धर्म, दर्शन, साधना के क्षेत्र में प्रयुक्त शब्दों के प्रतीकार्थों को समझना जरूरी है। प्रतीकार्थों को जाने बिना 'सात द्वार', 'नव खण्ड', 'षटचक्र' का अनुवाद नहीं किया जा सकता।

इस विवेचन के आलोक में नाइडा की उक्ति की सार्थकता समझी जा सकती है–

"स्थानीय सांस्कृति परिघटना के प्रतीक-शब्दों को सम्बन्धित संस्कृति-ज्ञान के बिना सम्यक् प्रकार से नहीं समझा जा सकता। इसी कारण किसी भाषा की अर्थपरक समस्याओं के समाधान के लिए मानवजाति विज्ञान का अध्ययन सबसे अधिक महत्त्वपूर्ण है। विभिन्न सांस्कृतिक इकाइयों को निर्दिष्ट करने वाले शब्दों का अन्वेषण इस दृष्टि से विशेष महत्त्व रखता है। विश्लेषणात्मक सामाजिक मानवविज्ञान एवं वर्णनात्मक भाषाविज्ञान का सहयोग अर्थविज्ञान के अध्ययन की समस्याओं का समाधानकारक है।"[29]

(6) **भाषा परिवर्तन**–मानवविज्ञान की मान्यता है कि संस्कृति की विभिन्न इकाइयाँ परस्पर सम्बद्ध होती हैं। संस्कृति के एक भाग के परिवर्तन का प्रभाव अन्य भागों पर पड़ता है।

संस्कृति-परिवर्तन के द्वारा भाषा-परिवर्तन का अध्ययन किया जाता है। जब 'मानवसमूह' एक स्थान से दूसरे स्थान पर गमन करता है अथवा दो भिन्न मानव समूहों में सम्पर्क होता है तो 'सांस्कृतिक तत्त्वों' तथा 'सांस्कृतिक संकुलों' का संचार होता है। इस 'संस्कृति-प्रसार' के कारण संस्कृति परिवर्तित होने लगती है।

'संस्कृति-प्रसार' का ज्ञान आगत शब्दों के अध्ययन में सहायक है। मुस्लिम शासन के दौरान अरबी-फारसी तथा अंग्रजी शासन के दौरान अंग्रेजी के शब्दों का भारतीय भाषाओं में आदान हुआ है। अरब व्यापारी, मुस्लिम फकीर, दरवेश तथा मुस्लिम शासकों के कारण जीवन के जिन क्षेत्रों में 'पर संस्कृति ग्रहण' हुआ उन क्षेत्रों में अरबी, फारसी एवं तुर्की की शब्दावली भारतीय भाषाओं में व्यवहृत होने लगी। हिंदी में अरबी, फारसी एवं तुर्की से आगत ऐसे शब्दों की संख्या भी बहुत अधिक है जिनके पर्याय हिन्दी में मिलते हैं। जब 'पुरुष' शब्द था तब 'आदमी' का तथा इसी प्रकार जब 'महिला' शब्द था तब 'औरत' का प्रयोग लोक-व्यवहार में क्यों होने लगा ? पुरुष एवं आदमी दोनों शब्द क्यों प्रचलित रहे ?–इसके लिये भारतीय सामाजिक चरित्र, शासकों का दबाव, परम्परागत संस्कृति को बनाए रखने की सामाजिक चेतना, भिन्न संस्कृतियों में समन्वय की परम्परा आदि सामाजिक-सांस्कृतिक तथ्यों को जानना जरूरी है। अंग्रेजी से आगत शब्दों का प्रयोग किन क्षेत्रों में अधिक होता

है ? प्रशासन, रेलवे, औद्योगिक विकास के क्षेत्रों में अंग्रेजी शब्दों की बाढ़ सी क्यों आ गयी है ? इसे समझने के लिए भारतीय संस्कृति पर ब्रिटिश संस्कृति के प्रभाव के क्षेत्र एवं आयाम तथा 'संस्कृति नवीनीकरण' की दिशाओं का ज्ञान आवश्यक है।

सांस्कृतिक कारणों से भाषा के प्रत्येक स्तर पर परिवर्तन होता है। हिंदी भाषा विकास की प्रकृति के अनुसार तो धर्म > धम्म > धाम = 'धाम' का प्रयोग होना चाहिए था। 'धाम' के स्थान पर 'धर्म' शब्द का प्रयोग क्यों होता है ? 'बनारस' के स्थान पर 'वाराणसी' क्यों बोला जाने लगा है ? 'तपिश' में 'तप' तो ठीक है, 'इश' परप्रत्यय कहाँ से आ गया ? 'हिंदुइज्म' में 'इज्म' परप्रत्यय का स्रोत क्या है ? 'आविष्कार', 'अनुवाद' जैसे शब्दों में अर्थ परिवर्तन क्यों हो गया ? 'निरवसित', 'व्रात्य', 'विट', 'दौवारिक', 'निमान', 'पाई', 'अग्निहोत्र', 'अथर्वन', 'खबीस', 'जिंद', 'कुठला', 'कुतुप', 'अनुगव', 'कद्रथ' जैसे शब्दों का प्रयोग आज क्यों बंद हो गया ? इस प्रकार के सभी प्रश्नों का उत्तर भाषा के सांस्कृतिक इतिहास के अध्ययन से प्राप्त हो सकता है। सांस्कृतिक संपर्क, सांस्कृतिक अंतर-व्याप्ति एवं सांस्कृतिक समानता के कारण भिन्न भाषा-परिवारों की भाषाओं में भाषिक तत्त्वों का आदान-प्रदान, भाषा-मिश्रण एवं भाषिक समानता का विकास होता है। भिन्न भाषा-परिवारों की भाषाएँ जब एक 'संस्कृति-क्षेत्र' में बोली जाने लगती हैं तो आपसी संपर्क से भाषिक तत्वों का आदान-प्रदान प्रारंभ हो जाता है। आनुवंशिक कारण से नहीं अपितु सामाजिक संपर्क होने पर जो सांस्कृतिक अंतर-व्याप्ति होती है उसके कारण भाषिक एकता पल्लवित होती है। इसी कारण भारतवर्ष में आधुनिक भारतीय आर्य भाषाओं एवं द्रविड़ भाषाओं के बीच भाषिक समानताएँ विद्यमान हैं।[30]

इसी कारण छोटा नागपुर में रहने वाली मुंडा जनजाति तथा ओराँव जनजाति की भाषाओं में समानताओं का विकास हुआ है।[31] ऐतिहासिक दृष्टि से तो मुंडा जनजाति की भाषा 'आस्टिक परिवार' तथा ओराँव जनजाति की भाषा 'द्रविड़ परिवार' की है।

'संस्कृति-सात्मीकरण' के अध्ययन से अर्थात् एक मानव-समूह की संस्कृति पर दूसरी संस्कृति के अत्यधिक प्रभाव के कारण उसके पृथक एवम् विशिष्ट अस्तित्व के लोप की प्रक्रिया के अध्ययन से 'क्रिओलित भाषाओं' की प्रकृति, स्वरूप एवं निर्माण की पहचान हो पाती है।

(7) भाषाओं का वर्गीकरण एवं अध्ययन-पद्धति–'संस्कृति-क्षेत्र' एवं 'संस्कृति-प्रसार' की ज्ञान-पीठिका पर भाषाओं के 'क्षेत्रीय वर्गीकरण' के संबंध में कार्य किया जा सकता है। एक संस्कृति-क्षेत्र में भिन्न-परिवारों की भाषाओं में ध्वनि, व्याकरण, वाक्य, शब्द-सभी स्तरों पर समानताओं का विकास होता है। कालांतर में, उस क्षेत्र में बोली जाने वाली भाषाओं का अपना अलग वर्ग बन जाता है। भारतवर्ष की आधुनिक भारतीय आर्य भाषाओं एवं द्रविड़ भाषाओं को 'भारतीय क्षेत्र' की भाषाओं के रूप में पहचाना जा सकता है।

स्वतंत्र अध्ययन-विषय एवं अध्ययन दृष्टियाँ

भाषा एवं संस्कृति में पारस्परिक संबंध है। भाषा विज्ञान एवं मानवविज्ञान दोनों अध्ययन विषयों

की संबद्ध परंपरा है। अध्ययन के कुछ क्षेत्रों एवं दिशाओं में ये दोनों परस्पर अवलंबित हैं। इतना होने पर भी दोनों स्वतंत्र अध्ययन विषय हैं। दोनों की स्वतंत्र अध्ययन दृष्टियाँ हैं। संसार की संस्कृतियों की संख्या तथा भाषाओं की संख्या समान नहीं है। एक क्षेत्र में अनेक भाषाएँ बोली जा सकती हैं। एक भाषा का प्रयोग भिन्न संस्कृति-क्षेत्रों में संभव है। भाषा की संपूर्ण व्यवस्था एवं संरचना की विशिष्टताओं का सांस्कृतिक तथ्यों के समानांतर अध्ययन संभव नहीं है। भाषा की संपूर्ण व्यवस्थागत एवं संरचनागत विशिष्टताओं तथा सांस्कृतिक तत्त्वों के बीच तार्किक संबंध निरूपित नहीं किया जा सकता। भाषा की यादृच्छिक प्रक्रिया संस्कृति के द्वारा निर्देशित होती है तो मानवीय संज्ञान से निर्धारित भी होती है। भाषा के बहुत से तथ्यों का न केवल सांस्कृतिक प्रत्युत भौतिक यथार्थता से भी कोई संबंध नहीं होता। हिंदी में पुरुष की 'मूँछ' का लिंग 'स्त्रीलिंग' है 'मूँछ अच्छी है'। स्त्री के 'उरोज' एवं गाय-भैंस के 'थन' का लिंग 'पुल्लिंग' है–'उभरे उरोज', 'मोटे थन'। कान, दाँत, ओठ पुल्लिंग क्यों हैं तथा नाक, आँख, जीभ, स्त्रीलिंग क्यों हैं–सांस्कृतिक संबंध के आधार पर इन प्रश्नों का उत्तर नहीं दिया जा सकता। सिर के 'बाल' जैसा सूक्ष्म एवं कोमल अवयव 'पुल्लिंग' है उसके सिर के बाल बहुत अच्छे हैं। शरीर की कठोर 'हड्डियों' का लिंग 'स्त्रीलिंग' है–'उसकी हड्डियों में दर्द है'।

संस्कृत के विद्यार्थी जानते हैं कि 'स्त्री' के बोधक 'दार' शब्द पुल्लिंग, 'भार्या' स्त्रीलिंग एवं 'कलत्र' नपुंसकलिंग है। इसी प्रकार 'काय' पुल्लिंग, 'तनु' स्त्रीलिंग और 'शरीर' नपुंसकलिंग है। भाषा की ध्वन्यात्मक व्यवस्था तथा संपूर्ण व्याकरणिक व्यवस्था का भाषा के संस्कृति-व्यवहार के प्रतिबिंब संबंध नहीं होता। 'भाषा-तथ्य' एवं 'सांस्कृतिक-तथ्य' सदैव समरूप नहीं होते। बोली विज्ञान एवं भाषा भूगोल पर स्वयं कार्य करते समय तथा शोधकर्ताओं को कराते समय लेखक को यह प्रत्यक्ष अनुभव हुआ कि सांस्कृतिक दृष्टि से 'एक क्षेत्र' में भिन्न भाषिक रूप बोले जा सकते हैं। भाषा के कुछ शब्दों एवं कुछ व्याकरणिक रूपों में बोलने वालों का दृष्टिकोण प्रतिबिंबित हो सकता है, किन्तु उच्चारण भेद, अधिकांश व्याकरणिक व्यवस्था एवं शब्दावली का जातिगत संस्कार अथवा सांस्कृतिक व्यवस्था से अभिन्न संबंध जोड़ना संगत नहीं है।

भाषा एवं संस्कृति के अध्ययन के संबंध में भाषावैज्ञानिक तथा मानववैज्ञानिक की अध्ययन-दृष्टियाँ भी भिन्न हैं। भाषावैज्ञानिक संस्कृति के संबंध में भाषा की व्यवस्था एवं संरचना को जानने की दृष्टि से विचार करता है। मानववैज्ञानिक भाषा के संबंध में मनुष्य को जानने की दृष्टि से विचार करता है। मानववैज्ञानिक के लिए 'शब्दार्थ' एवं भाषा का अध्ययन सांस्कृति तत्त्वों के विश्लेषण एवं विवेचन का एक साधन है। भाषावैज्ञानिक के लिए किसी भाषा समाज के सांस्कृतिक पक्ष का अध्ययन 'शब्दार्थ', 'भाषिक तत्त्वों का आदान-प्रदान' तथा 'भाषा-परिवर्तन' आदि के विश्लेषण एवं विवेचन का एक साधन है। हाकिट के शब्दों से इन दोनों अध्ययन-विषयों के पारस्परिक संबंध के स्वरूप का उपसंहार किया जा सकता है–

'भाषाविज्ञान के बिना मानवजाति विज्ञान अंधा है। मानवजाति विज्ञान के बिना भाषाविज्ञान बंजर भूमि है।'[32]

निर्देश

1. क्रोबर, ए. एल. : 'Some Relations of Linguistics and Ethnology', Language 1941, 17 pp. 289-290.

2. मैलिनोव्स्की : 'Coral Gardens and their Magic : A study of the methods of tilling the Soild and of Agricultural rites in the Trobriand Islanders', London : Allen & Unwin, (1935).

3. वही.

4. फर्थ, जे. आर. : 'Ethnographic Analysis and Language with Reference to Malinowskis Views', In : Man and Culture. ' pp. 93-118, Firth, Raymond (ed.), London (1957)

5. वही : (A) 'The Tongues of Men' London (1937).
(B) 'Papers in Linguistics 1934-1951', London (1957)

6. सोस्यूर, एफ. : 'Course in General Linguistics', (Translated from French by Wade Baskin), (1958).

7. पार्सन, टैल्काट तथा अन्य (Eds.) : 'Theories of Society.' Glencoe, Free Press. Vol, II (1961) (Views of Meillet–partially translated).

8. दुर्खीम, एमिले : 'The Elementary Forms of Religious Life !' (Translated form the French by Joseph Ward Swain), London (1915).

9. ' .. Languages are clearly reflected in the views and customs of the peoples of the world' बोआस, एफ. : 'Linguistics and Ethnology.' In : 'Language in Culture and Socity'. p. 22. Dell Hymes (ed.), (1966).

10. वही.

11. बोआस, एफ़ : 'Introduction : Handbook of American Indian Languages.' In : BAE/B 40 (1911).

12. The New Encyclopaedia Britanica (in 30 Volumes) 1977, Volume 1, p. 971.

13. बेनडिक्ट, रूथ. : "Patterns of Culture." Boston & New York (1934).

14. क्रोबर, ए. एल. : (A) 'The Nature of Culture,' Chicago (1952).
: (B) 'Some Relations of Linguistics and Ethnology,' Language, 1941, 17, pp. 289-290.

15. हेम्स, डेल. एच. : 'Alfred Louis Kroeber, ' In : 'Language in Culture and Society', pp. 689-710.

16. 'Selected writings of Edward Sapir', In : Language, Culture and Personality. (ed.) Devid G. Mandelbaum, University of California Press (1949).
(A) 'Abnormal Types of speech in Nootka', pp. 179-196.

(B) 'Central and North American Languages', pp. 169-178.
(C) 'Male and Female Forms of speech in Yana', pp. 2060212.

17. सपीर, ई. : Language, New York (1921).

18. बोआस, फ्रेन्ज : Introduction : Handbook of American Indian Languages.' pp. 1-83, Bureau of American Ethonology, Bulletin 40, Part I (1911).

19. व्हार्फ, बेंजामिन ली : 'A Linguistic consideration of Thinking in Primitive Communities', In : 'Language, Thought and Reality' (Selected writings of Benjamin Lee Whorf) 1956, pp. 65-86, Edited by John B. Carroll.

20. पिडिंगटन : 'An Introduction to Social Anthropology.' 1952, p. 122. London .

21. पाइक, के. एल. : 'Towards a Theory of the structure of Human Behavior" In : "Language in Culture and Society', p. 55, Dell Hymes (ed.).

22. बोआस, एफ. (ed.) : 'General Anthropology' 1938, p. 132, New York.

23. होइजर, हैरी (ed.) : 'Language in Culture', (1954).

24. जैन, महावीर सरन : 'लोक साहित्य', प्राच्य-भारती, पृ० 90-91, दिसम्बर-जनवरी वार्षिक विशेषांक 1964-65. मंदार विद्यापीठ, भागलपुर (1964-65)

25. श्रीमती कुन्तल गोयल : 'नृतत्त्व एवं समाजशास्त्र के आधार पर छत्तीसगढ़ के सरगुजा जिले के लोकगीतों का अध्ययन', पृ० 112 (जबलपुर विश्वविद्यालय की पी-एच० डी० उपाधि के लिए सन् 1972 में स्वीकृत अप्रकाशित शोध प्रबंध) निर्देशक डॉ० महावीर सरन जैन।

26. फ्रेक, चार्ल्स, ओ. : 'The Ethnographic Study of Cognitive systems', In : 'Readings in the Sociology of Language', p. 437, Fishman (ed.), (1972).

27. वही.

28. हिंदी अनुशीलन : धीरेन्द वर्मा विशेषांक, पृ० 151-154 भारतीय हिंदी परिषद, प्रयाग (1960).

29. नीड़ा, यूजीन : 'Linguistics and Ethnology in Translation Problems', In : 'Language in Culture and Society', p. 97.

30. जैन महावीर सरन : नव्यतर आर्य भाषाओं एवं द्रविड़ भाषाओं के मध्य भाषात्मक समानताएँ : कुछ संकेत, 'माध्यम', पृ० 56-58 (फरवरी, 1967)।

31. मजूमदार, डी. एन. तथा मदन, टी. एन. : 'An Introduction to Social Anthropology' p. 254, Asia Publishing House, Bombay (1956).

32. होइजर, हैरी : Language in Culture, (1954).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No.4, October, 1999.

बहुचरणीय *I*-फलन के लिये कुछ भिन्नात्मक व्युत्पन्न

अशोक कुमार रोंघे

गणित विभाग, एस० एस० एल० जैन स्नातकोत्तर महाविद्यालय,
विदिशा (म० प्र०)

[प्राप्त - अप्रैल 16, 1999]

सारांश

प्रस्तुत शोध प्रपत्र में बहुचरणीय I-फलन युक्त कुछ भिन्नात्मक परिणाम प्राप्त किये गये हैं, जिनमें प्रत्येक परिणाम से अज्ञात विशिष्ट दशायें ज्ञात की गई हैं जिनका अनुप्रयोग गणितीय भौतिकी विषयक समस्याओं को हल करने में किया जाता रहा है।

Abstract

Fractional derivatives of multivariable *I*-function. *By* Ashok Kumar Ronghe, Department of Mathematices, S. S. Jain P. G. College, Vidisha (M.P.) .

In this paper, we have derived a few fractional derivatives involving multivariable *I*-function. By these derivatives, we obtain un-known particular cases, which are applicable in the field of mathematical physics.

1. परिभाषा, प्रस्तावना एवं ज्ञात परिणाम

भिन्नात्मक अवकलन के सिद्धांत एवं अनुप्रयोग कई दशकों से परिचित हैं जो अवकलन आपरेटरों ${}_{\alpha}D_{x}^{\mu}$ पर आधारित हैं जिसको निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया गया है।[2]

$$\alpha D_x^{\mu}\{f(x)\} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma-\mu}\displaystyle\int_{\alpha}^{x}(x-t)^{-\mu-1} f(x)\,dt, \mathrm{Re}(\mu)<0, \\ \dfrac{d^m}{dx^m}\cdot \alpha D_x^{\mu}\{f(x)\}, 0 \le \mathrm{Re}(\mu) < m;\ m \varepsilon N_0 \end{cases}$$

जहाँ

$$N_o = N\,U\,\{0\},\ (N=\{1,2,3,.....\}),\ (1.1)$$

संक्षिप्तता के लिये यदि $\alpha = 0$, रखें, तो आपरेटर D_x^{μ} को αD_x^{μ} लिख सकते हैं।

$$\alpha D_x^{\mu} \equiv 0 D_x^{\mu}.\quad (1.2)$$

प्रसाद ने सर्वप्रथम[7] बहुचर I-फलन को निम्नलिखित प्रकार से प्रदर्शित किया–

$$I\begin{bmatrix} Z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Zr \end{bmatrix} \equiv I^{0,n_2:0,n_3:\ldots:0,n_r:M}_{p_2,q_2:p_3,q_3:\ldots:p_r,q_r:N}\begin{bmatrix} Z_1 & \\ \cdot & P_1,\ P_2 \\ \cdot & Q_1,\ Q_2 \\ \cdot & \\ Z_r & \end{bmatrix},$$

$$= \frac{1}{(2\pi\omega)^r}\int_{L_1\ldots}\int_{L_r}\Phi_1(S_1)\ldots\ldots\Phi_r(S_r)\,\psi(S_1,\ldots\ldots,S_r)$$

$$Z_1^{S_1}\ldots\ldots Z_r^{S_r}.\ dS_1\ldots dS_r,\ (1.3)$$

जहाँ $\omega = \sqrt{-1}$ और

$$\Phi_i S_i = \prod_{j=1}^{m_i}\Gamma(R_1)\prod_{j=1}^{n_i}\Gamma(1-R_2)\ \Big/ \prod_{j=m\,i+1}^{q_i}\Gamma(1-R_1)\prod_{j=r_i+1}^{p_i}\Gamma(R_2),\qquad (1.4)$$

$$\psi(S_1\ldots\ldots S_r) = \prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-R_3)\ \ldots\ldots\ldots \prod_{j=1}^{n_r}\Gamma(1-R_u)$$

$$\left\{\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma\ (R_3)\ldots\prod_{j=n_r+1}^{p_r}\Gamma\ (R_u)\cdot\prod_{j=1}^{q_2}\Gamma\ (1-y_1)\ldots\ldots\prod_{j=1}^{q_r}\Gamma\ (1-y_u)\right\}^{-1}(1.5)$$

$$\forall u\,\varepsilon\,(1,\ldots\ldots,r)$$

कंटूर (1.3) अभिसारी है यदि,

$$|\arg Z_i| \leq 1/2\, U_i \pi\,; \quad U_i > 0 \quad i = 1, \ldots\ldots, r, \tag{1.6}$$

जहाँ

$$U_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} \alpha_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i} \beta_j^{(i)} - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} \beta_j^{(i)} \ldots\ldots$$

$$\ldots + \left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_{r_j}^{(i)} - \sum_{j=n_r+1}^{p_r} \alpha_{r_j}^{(i)} \right) - \left(\sum_{j=1}^{q_z} \beta_{2j}^{(i)} + \sum_{j=1}^{q_3} \beta_{3j}^{(i)} + \ldots \sum_{j=1}^{q_r} \beta_{rj}^{(i)} \right)$$

प्रपत्र में फलन के विस्तार को देखते हुये निम्नांकित संकेतन का प्रयोग किया गया है, जो अधिक संक्षिप्त तथा स्वतः व्याख्यात्मक है।

$M \equiv (m', n')'\,; \ldots\ldots\ldots; (m^r . n^r);$ $\qquad N \equiv (P', q')\,; \ldots\ldots; (P^r, q^r) :$

$P_1 \equiv (a_2, j : \alpha_{2j}', \alpha_{2j}'')_{j, p_2}; \ldots\ldots\ldots;$ $\qquad (a_{rj}, \alpha_{rj}' \ldots\ldots \alpha_{rj}^r)\, 1, p_r$

$P_2 \equiv (\alpha_{2j}' \alpha_j')\, 1, p'\,; \ldots\ldots\,;$ $\qquad (a_j^{(r)}, \alpha_1^{(r)})_{j,\, p_r};$

$Q_1 \equiv (b_{2j} : \beta_{2j},\ \beta_{2j})_{1,\, q_2}; \ldots\ldots;$ $\qquad (b_{rj},\ \beta_{rj}' \ldots\ldots : \beta_{rj}^{(r)})_{1,\, q_r};$

$Q_2 \equiv (b_{2j}',\ \beta_j')_{1,\, q}'\,; \ldots\ldots;$ $\qquad (b_j^{(r)},\ \beta_j^{(r)})_{1,\, q_r}$

$R_1 \equiv (b_j^{(i)} - \beta_j^{(i)} Si)\,,$ $\qquad R_2 \equiv (a_j^{(i)} - \alpha_j^{(i)} Si)$

$R_3 \equiv \left(a_{2j} - \sum_{i=1}^{3} \alpha_{3j}^{(i)}\ \alpha_{3j}^{(j)}\ Si\right),$ $\qquad R_4 \equiv \left(a_{rj} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_{rj}^{r}\ \alpha_{rj}^{(i)}\ Si\right)$

$$Y_1 \equiv (b_{2j} - \sum_{i=1}^{2} \beta_{2j}^{(i)} Si), \qquad Y_u \equiv (b_{rj} - \sum_{i=1}^{r} \beta_{rj}^{(i)} Si)$$

यहाँ पर, तथा आगे सर्वत्र (i) से डैशों की संख्या सूचित होगी। यथा $b^{(i)} = b'$, $b^{(2)} = b''$, ...; $(a_j', \alpha_j')_2$, p' तथा $(a_{2j} : a_{2j}', a_{2j}'')$ 1, p_2, P_1 तथा P_2 प्राचलों के अनुक्रमों के लिये आये हैं, अर्थात् क्रमशः $(a_1' \alpha_1')$, ... (a_p', α_p') तथा $(a_{2i}, : \alpha_{2i}', \alpha_{2,i}'')$ .... $(a_{2p} : a_{2p}' \; a_{2p}'')$। रिक्त गुणनफल को इकाई माना गया है। (1.3), (1.4) एवं (1.5) में आगत गुणांक $\alpha_j^{(1)}$, $\beta_j^{(i)}$, $\alpha_{kj}^{(i)}$, $(i = 1, ... r : k = 1....r)$ धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं तथा उसमें निहित $a_j^{(i)}$, $b_j(i)$, $(i = 1, ...r)$, $a k_j$, b_{kj}, $(k = 2 ..... r)$ संकर संख्यायें हैं तथा यहाँ पर प्रयुक्त $m^{(i)}, n^{(i)}$, $p^{(i)}$ $q^{(i)}$ $(i = 1, ... r)$ n_k, q_k $(k = 2 .... r)$ धनात्मक पूर्णांक हैं जिसमें $0 \le m^i \le q^i$, $0 \le n^{(i)} \le p^{(i)}$, $q_k \ge 0$, $0 \le n_k \le p_k$ तुष्ट होते हैं।

संकुल S_i-तल पर का कंटूर L_i मेलिन-बार्नीज प्रकार का है और यह अपने दंतुरों सहित $-w\infty$ से $+w\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे कि यदि आवश्यकता पड़े तो $\Gamma(R_1)$ के सारे पोल Li के दाई ओर पड़ें तथा $\Gamma(1-R_2)$, $\Gamma(1-R_3)$ .... $\Gamma(1-R_u)$ के पल बाई ओर पड़ें। ब्राक्समा का अनुसरण करते हुए पुष्टि की जा सकती है, कि

$$I[Z_1 .... Z_r] = O(|Z_1|^{\alpha_1} ...... |Z_r|^{\alpha_r}), \; \max\{|Z_1| ... |Z_r|\} \to 0$$

जहाँ

$$\alpha_1 = \min \operatorname{Re}(b_j^i / \beta_j^i), \; j = 1, ... n^i, \; i = 1, ... r$$

$$n_2 = n_3 = ... = n_r = 0, \tag{1.8}$$

2. इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित परिणामों का प्रयोग करेंगे [4, p. 65 और 5 p. 96],

$$(a x^\gamma + b)^\lambda = b^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} a^m \binom{\lambda}{m} \cdot \left(\frac{x^\gamma}{b}\right)^m, \left(\left|\frac{x}{b}\right|\right) < 1 \tag{2.1}$$

$$D_x^\alpha (a c^\gamma + b)^\lambda = \frac{a^\alpha \Gamma \gamma \lambda + 1) . (a x + b)^{\lambda - \alpha}}{\Gamma(1 + \alpha \lambda)}, \tag{2.2}$$

यहाँ a, b शून्येतर अचर हैं।

3. मुख्य परिणाम

$$D_x^{\mu}\left\{x^k(ax^{\gamma}+b)^{\lambda}\right\}\left[\left|\begin{matrix}[Z_1 x_1^{\partial}(ax^{\gamma}+b)^{-\sigma_1}]\\ .\\ .\\ .\\ [Z_r x_r^{\partial}(ax^{\gamma}+b)^{-\sigma_1}]\end{matrix}\right.\right]$$

$$=b^{\lambda}x^{k-u}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-x^{\gamma}/b)^m}{m!}a^{m-u}\left|\begin{matrix}0,n_2:O,n_3:......:O_1\,n_{r+2},M\\ p_2,q_2:p_3,q_3:.....:p_r+2,q_r+2:N\end{matrix}\right.$$

$$\left[\begin{matrix}Z_1(b/a)^{-\sigma_1}x^{\rho_1}\\ Z_n(b/a)^{-\partial_r}x^{\rho_r}\end{matrix}\left|\begin{matrix}P_1,(1+\lambda-m;\sigma_1....,\sigma_r)\ (-K-\gamma_m:P_1....P_r:P_z\\ Q_1(1+\lambda:\sigma_1.......\partial_r),\ (-\mu-K-\gamma_m:\rho_1....\rho_r)\ Q_z\end{matrix}\right.\right.$$

यह परिणाम निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है-

$$\min\{\gamma,\rho_i,\partial_i\}>0,\ (i=1,....r),\ |\arg x^{\gamma}/b|<\pi$$

और
$$\operatorname{Re}\left[(K)+\sum_{i=1}^{\infty}\rho_1\ \alpha_i\right]>-1 \qquad (3.1)$$

जबकि α_i का आशय (1.7) में दिया है।

$$D_x^{\mu}.D_y^{\mu'}\left\{x^k y^{k'}(ax^{\gamma}+b)^{\lambda}\ (cy^{\gamma'}+d)^{\lambda}_{x}\right\}\left[\begin{matrix}[Z_1x^{\rho_1}y^{\lambda_1}(ax^{\gamma}+b)^{-\sigma_1}\ (cx^{\gamma}+d)^{-\gamma_1}]........\\ [Z_rx^{\rho_r}y^{\lambda_r}\ (ax^{\gamma}+b)^{\sigma_r}\ (cx^{\gamma}+d)^{-\gamma_r}]\end{matrix}\right]$$

$$=b^{\lambda}d_{\lambda}'x^{K-\mu}y^{K'-\mu}\sum_{m,l=0}^{\infty}\frac{(-x^{\gamma'}/b)}{l!}\ \frac{(-x^{\gamma}/d)}{l1}\ a^{m-\mu}\ c^{l-\mu'}\times$$

$$I^{0,n_2:.....:0,n_r+4:M}_{p_2,q_2:.....:p_r+4,\ q_r:N}\left[\begin{matrix}Z_1(b/a)^{-\sigma_1}\ (d/c)^{-\lambda_1'}\\ .\\ Z_r(b/a)^{-\sigma_r}\ (d/c)^{-\lambda_r}\end{matrix}\left|\begin{matrix}P_1,\ S_1\\ \\ Q_1,\ S_r\end{matrix}\right.\right] \qquad (3.2)$$

यहाँ S_1 और S_r प्राचलों का संमुच्चय है जो निम्नवत् है जिसके प्रतिबंध निम्नलिखित हैं एवं P_1, P, Q_1 और Q_2 परिभाषित हैं।

$$S_1 \equiv (1+\lambda-l:\sigma_1, \ldots, \sigma_r)\ (1+\lambda-m:\gamma_1 \ldots, \gamma_r),\ (-K-\gamma l,\ \rho_1 \ldots \rho_r)$$

$$\times\ (-K-\gamma_m : \lambda_1 \ldots, \lambda_r) : \rho_2$$

$$S_r \equiv (1+\lambda', \sigma \ldots, \sigma_r), (1+\lambda'; \gamma_1 \ldots \gamma_r)\,(\mu-k'-\gamma l; \rho_1 \ldots \rho_r)$$

$$\times\ (\mu'-k'-\gamma' m; \lambda_1 \ldots, \lambda_r)\, Q_2$$

(3.2) निम्नलिखित प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है।

$$\min(\gamma, \gamma', \rho_i, \sigma_i, \lambda_i, \gamma_i) > 0,\ i=(1, \ldots, r)$$

$$\max\left\{\left(|\, arg\, (x^{\gamma}/b)\,|,\ \text{और}\ (arg\,|\,(y^{\gamma^1}/d\,|\right)\right\} < \pi$$

$$\mathrm{Re}\,(k)+\sum_{i=1}^{r}\rho_i Q_i\Bigg] > -1,\ \mathrm{Re}\,(K')+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\alpha_i\Bigg] > -1,$$

उपपत्ति : (3.1) को सीधे और सामान्य तरीके से हल के लिये प्रथम बहुचर I-फलन को समाकलन रूप में लिख लेते हैं। फिर द्विपद व्यंजक के लिये समान आधारित घातों को जोड़ कर आपरेटरों का क्रम बदलने पर जो पूर्ण रूप से अभिसारित है, निम्नलिखित व्यंजक की प्राप्ति होती है।

$$=\frac{1}{(2\pi\omega)^r}\int_{L_1}\ldots\int_{L_r}\Phi(S_1)\ldots\ \Phi_r(S_r)\,\psi(S_1 \ldots S_r)$$

$$\left\{D_x^{\mu}\ .\ x^{K+\rho_1 S_1+\ldots|}\ \partial_r^{s}\ (a x^{\gamma}+b)^{\lambda-(\sigma_1 S_1+\ \ldots+\ \sigma_r S_r)}\right\}$$

$$Z_1^{S_1}\ \ldots\ Z_r^{S_r}\ .\ dS_1 \ldots\ dS_r$$

ज्ञात परिणाम (2.1) एवं (2.2) का प्रयोग करने एवं प्राप्त परिणाम की पुनः (1.1) से विवेचना करने पर (3.1) की प्राप्ति होती है। इसी प्रकार परिणाम (3.2) को प्राप्त किया जा सकता है।

4. विशिष्ट दशाएँ

इस अनुभाग में मुख्य परिणाम (2.1) के ज्ञात एवं अज्ञात परिणाम ज्ञात किये जायेंगे

(i) मुख्य परिणाम केवल (2.1) में $a = 1, b = \xi, \gamma = 1, d = \xi\ \gamma = 1$ रखें तो बहुचर *I*-फलन का निम्नलिखित रूप प्राप्त होता है–

$$D_x^{\mu}\left\{x^k (x+\xi)^{\lambda} I\left[Z_1 x^{\rho_1} (x+\xi)-\sigma_1 \ldots\ldots Z_r x^{\rho_r}(x+\xi)^{-\sigma_r}\right]\right.$$

$$=\xi^{\lambda}(x^{k-\mu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-x/\xi)^{\mu}}{m!}\ I^{0,\,n_2;\,\ldots\,:0,\,n_{r+2}\,:\,M}_{p_2,\,q_2;\,:\,P_{r+2},\,q_{r+2}\,N}\left[\begin{array}{c|c} z_1(\xi)^{-\sigma_1}x^{\rho_1} & (1+\lambda-m;\ \sigma_1\ldots,\sigma_r)\ (-K-m;\ \rho_1\ldots,\ \rho_r) \\ z_r(\xi)^{-\sigma_r}x^{\rho_r} & (1+\lambda;\ \sigma_1\ldots,\ \sigma_r)\ (\mu-k-m;\ \rho_1\ldots,\ \rho r \end{array}\right] \quad (4.1)$$

परिणाम (4.1) के लिये वे सभी प्रतिबंध लागू होंगे जो (3.1) के लिये हैं।

(ii) पुनः मुख्य परिणाम (2.1) में यदि $r = 2$ रखें तो बहुचर *I*-फलन दो चरों वाले *I*-फलन में समानीत हो जायेगा।

$$D_x^{\mu}\left\{x^{\lambda}(ax^{\gamma}+b)^{\lambda}\ I\left[z_1 x^{\rho_1}(ax^{\gamma}+b)^{-\sigma_1}\ .\ z_2 x^{\rho_2}(ax^{\gamma}+b)^{-\sigma_2}\right]\right.$$

$$=b^{\lambda}\ x^{K-\mu}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{-x^{\gamma}}{b\,m_1}\right)a^{m-\mu}\ I^{0,\,m_2+2\,:\,M}_{p_2+2,\,q_2\,:\,N}\left[\begin{array}{c|c} z_1\ (b/a)^{-\sigma_1}\ x^{\rho_1} & P_1,\ (1+\lambda-m;\ \sigma_1,\ \sigma_2),\ (-K-\gamma_m;\ \rho_1,\ \rho_2)\ P_2 \\ z_2\ (b/a)^{-\sigma_2}\ x^{\rho_2} & Q_1,\ (1+\lambda;\ \sigma_1,\ \sigma_2)\ \ (-\mu-K-\gamma_m:\ \rho_1\ \rho_2)\ Q_2 \end{array}\right] \quad (4.2)$$

परिणाम (4.2) के लिये वे सभी प्रतिबंध लागू होंगे जो (3.1) के लिये हैं केवल $r = 1, 2$ होगा।

5. अनुप्रयोग

बहुचर *I*-फलन एवं *H*-फलन की परिभाषाओं का तुलनात्मक अध्ययन करने पर हम पाते हैं कि बहुचर *I*-फलन में $\bar{S}_1 \ldots S_r$ के सभी संभव रैखिक संयोगी गामा फलन हैं जबकि बहुचरीय *H*-फलन में केवल एक रैखिक संयोगी का गामा फलन निहित होता है।

अतः विशिष्ट दशा में प्राप्त भिन्नात्मक बहुचरीय I-फलन युक्त परिणाम (4.1) एवं (4.2) में बराबर के दोनों पक्षों में यदि

$n_2 = n_3 = \ldots\ldots n_{r-1} = 0$, $P_2 = P_3 = \ldots. = P_{r-1}$ तथा $q_2 = q_3 = \ldots.. q_{r-1} = 0$, प्राप्त परिणाम [5, p. 98] बहुचरीय H-फलन में समानीत हो जाते हैं।

आगे पुनः इस स्थिति को दोहराते हुए विशिष्ट दशा के परिणामों को मात्र $r = 1, 2, 3...$ रखने पर फाक्स H-फलन, दो चरीय H-फलन एवं तीन चरीय H-फलन इत्यादि, आगे वांछित संख्या के चरों वाले विशिष्ट फलनों के गुणनफलों में समानीत किया जा सकता है।

कृतज्ञता–ज्ञापन

इस शोधपत्र के दौरान प्रोत्साहन देने के लिये लेखक जैन कालेज के प्राचार्य डॉ० एस० के० जैन का आभारी है।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी. एल. जे : Comp. Maths., 1962, 15, 239

2. एर्डेल्यी, ए. इत्यादि : H. T. F. Part I, मैकग्राहिल, 1953

3. फाक्स, सी. : Trans Amer. Math. Soc. ,1961, 96, 395-429

4. ओल्धम, के. बी. तथा स्पेनियर, जे. : Functional Calculus, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क, लन्दन 1974

5. रोंघे. ए. के. : Mathematical Notes, Argentina, 1995-96, 38, 95-99

6. रोंघे ए. के. : शोध प्रबंध, बरकतउल्ला विश्वविद्यालय, भोपाल (म. प्र.) 1993.

7. प्रसाद, वाई. एन. : विज्ञान परिषद् अनु. पत्रिका, 1986, 28, 23-35

8. प्रसाद, वाई. एन. तथा प्रसाद, एस. : Bull. Tech., Univ. Istambul, 1980, 33 (2), 41.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No.4, October, 1999.

कतिपय पाइरैजोलोक्विनैजोलोनों का संश्लेषण

एम० के० श्रीवास्तव, ए० रुखैयर तथा के० एम० त्रिवेदी

रसायन विभाग, गया कालेज, गया (बिहार)

[प्राप्त - सितम्बर 1, 1999]

सारांश

3-एसाइलऐमीनो-2-ऐल्किल/ऐरिल-3, 4-डाइहाइड्रो-4-आक्सोक्विनैजोलीनों के $C_{(2)}$-मेथिल या मेथिलीन समूहों की अभिक्रियाशीलता का उपयोग $N_{(3)}$-ऐसिलैमीनो समूह की साइक्लोडिहाइड्रेशन अभिक्रिया के लिये किया गया है जिससे नये प्रकार की त्रिचक्रीय वलय प्रणाली वाले पाइरैजोलोक्विनैजोलोन प्राप्त किये जा सके। ऐसे अनेक यौगिकों का संश्लेषण करके उनके लक्षण निश्चित किये गये हैं।

Abstract

Synthesis of some pyrazoloquinazolones from 3-amino-2-alkyl/aryl-3, 4-dihydro-4-oxoquinazolines. *By* M. K. Srivastava, A. Rukhaiyar and K. M. Trivedi, Post Graduate Department of Chemistry, Gaya College, Gaya (Bihar).

Reactivity of the $C_{(2)}$-methyl of methylene groups in the 3-acylamino-2-alkyl/aryl-3, 4-dihyro-4-oxoquinazolines has been utilized in cyclodehydration reaction involving $N_{(3)}$-acylamino group reacting in their enolic forms, to yield a new type of pyrazoloquinazolone fused tricyclic ring system (scheme I-III). A number of such pyrazoloquinazolones have been synthesised and characterised.

3-ऐमीनो-2-मेथिल-3, 4-डाइहाइड्रो-4-आक्सोक्विनैजोलीन को सर्वप्रथम बोगर्ट तथा सील[1] ने तैयार किया किन्तु क्लोसा[2] ने अपेक्षतया सरल एवं अधिक उपलब्धि देने वाली नई विधि से इसे तैयार किया। इस यौगिक में कम से कम तीन अभिक्रियाशील केन्द्र होते हैं– $N_{(3)} - NH_2$, $C_{(2)}$–मेथिल

तथा 4-आक्सो समूह जो क्विनैजोलीन वलय प्रणाली के पिरिमिडीन अंश में होते हैं। क्विनैजोलीन या 4-आक्सोक्विनोजोलीन में $N_{(3)}$ –ऐमीनो समूह ऐसा अभिक्रिया स्थल है जो विभिन्न ऐल्डिहाइड तथा कीटोनों के साथ संघनन के फलस्वरूप ऐज़ोमेथीन बनाता है[3, 4]। इसे डायोटाइज करने के बाद नैफ्थाल के साथ युग्मित करके ऐज़ो रंजक बनाये जा सकते हैं। इसे एस्टरों से अभिक्रिया कराकर 3-ऐसिल ऐमीनो व्युत्पन्न प्राप्त किये जा सकते हैं[5]। $C_{(2)}$ पर मेथिल या मेथिलीन समूह भी अभिक्रियाशील होता है विशेषकर 4-आक्सोक्विनैजोलीन में, यद्यपि $N_{(3)} - NH_2$ समूह की अपेक्षा कम अभिक्रियाशील होता है। यह ऐल्डीहाइडों[6, 7] तथा कीटोनों के साथ संघनन के फलस्वरूप स्टाइरिल व्युत्पन्न प्रदान करता है।[8] यह पर्याप्त अभिक्रियाशील होता है अतः इसे सक्रिय मेथिल मेथिलीन ब्लू समूह माना जा सकता है।

हमने 3-ऐमीनो-2-ऐल्किल/ऐरिल- 3, 4-डाइहाइड्रो-4-आक्सोक्विनैजोलीन के साथ संगलित ट्राइ-साइक्लिक वलय प्राणाली तैयार करने की योजना बनाई जिसका आधार $N_{(3)}$-ऐमीनो तथा $C_{(2)}$-मेथिल/मेथिलीन ब्लू की सक्रियता था। ऐमीनो समूह की अभिक्रिया शृंखला में दक्षिण पक्ष में एक समूह युक्त सक्रिय एस्टर से कराई जा सकती है जिसे बाद में $C_{(2)}$- ऐल्किल/ऐरिल समूह के साथ संघनित करके एक वृत्तीय विषम चक्रीय वलय प्राप्त किया जा सकता है। ऐसी आशा की गई कि ऐसे संश्लेषण के लिए ऐथिलऐसीटोऐसीटेट दो अभिक्रियाशील समूह प्रदान कर सेकगा। फलस्वरूप I ($R = -CH_3, -CH_2Ph$ तथा $-CH_2C_6H_4NO_2$ (p –) के ऐसीटो ऐसीटिल व्युत्पन्न तैयार किये गये और बाद में उन्हें पाइरैजोलो क्विनैजोलोनों [III, R = - H, – Ph तथा $-C_6H_4NO_2$ (p –) में परिणत किया गया।

प्रयोगात्मक

प्राप्त यौगिकों के गलनांक सल्फ्यूरिक अम्ल अवगाह का प्रयोग करते हुए निश्चित किये गये। जिन ठोसों का गलनांक उच्च था उनके लिए वैद्युत उपकरण काम में लाया गया। असंशोधित IR स्पेक्ट्रमों को पार्किन-एल्मर (577) स्पेक्ट्रोफोटोमीटर द्वारा KBr डिस्कों पर अंकित किया गया।

3– ऐमीनो-2मेथिल-3, 4–डाइहाइड्रो-4-आक्सोक्विनैजोलीन (I), (R = – H)

ऐन्थ्रैनिलिक अम्ल (10ग्रा०) को ऐसीटिक ऐनहाइड्राइड (30 मिली०) के साथ 3 घंटे तक पश्चवाहित किया गया। ऐसीटिक ऐनहाइड्राइड का कुछ अंश (20 मिली०) आसवन द्वारा निकाल दिया गया और मेथेनाल (10 मिली०) में घुले हाइड्रैजीन हाइड्रेट (10 मिली० 90%) को मिलाया गया। अमोनियम हाइड्राक्साइड की अधिक मात्रा डाल कर उत्पाद को विलय किया गया और जल से पुनः क्रिस्टलित करने पर श्वेत क्रिस्टल प्राप्त हुये जिनका गलनांक $148 - 150^\circ C$ था। लब्धि 6.8 ग्रा०। $C_9H_9N_3O$ में C, 61.46, H, 5.33, N, 23.82% पाया गया जबकि इसमें C, 61.71, H 5.14, N 24.00% होना चाहिए। इसका V_{max} (K Br) 1670 cm^{-1} (क्विनैजोलोन कार्बोनिल स्ट्रेचिंग), 3330 तथा 3230 cm^{-1} (N-H बंधित हाइड्रैजाइड स्ट्रेचिंग)।

3-ऐसीटोऐसीटिल ऐमीनो-2-मेथिल-3, 4-डाइहाइड्रो-4-आक्सोक्विनैजोलीन (II, R = – CH_3)

3-ऐमीनो-2-मेथिल-3, 4-डाइहाइड्रो-4 आक्सोक्विनैजोलीन (3.5 ग्रा०) को ऐथिल ऐसीटोऐसीटेट (3 मिली०) में मिलाया गया। तब n-ब्यूटैनाल (20 मिली०) डालकर मिश्रण को 6 घंटे तक पश्चवाहित किया गया। अधिक n-ब्यूटैनाल को आसवन द्वारा हटा दिया गया। ठंडा करने पर जो ठोस विलग हुआ उसे छान कर एकत्र कर लिया गया। इसे n-ब्यूटैनाल से क्रिस्टलित करने पर पीले नारंगी क्रिस्टल विलग हुए जो शुद्ध ऐसीटोऐसीटिल ऐमीनोक्विनैजोलोन के थे। लब्धि 3.1 ग्रा० 60%, गलनांक 232 °C, $C_{13}H_{13}N_3O_3$ के लिए N 16.22% चाहिए किन्तु N 16.10% प्राप्त हुआ। इसका I R : V_{max} (K Br) 1680 cm^{-1} (क्विनैजोलोन तथा ऐमाइडी कार्बोनिक स्ट्रेचिंग, 3410 cm^{-1} (N-H बन्धित)।

II (R = – CH_3) का पाइरैजोलोक्विनैजोलोन III (R = – CH_3) में साइक्लोडिहाइड्रेशन

3-ऐसीटोऐसीटिल ऐमीनो-2-मेथिल-3,4-हाइहाइड्रो-4-आक्सोक्विनैजोलीन (1.3 ग्रा०) को शुष्क बेंजीन (30 मिली०) में घोला गया। इसमें p-टोल्वीन सल्फोनिक अम्ल की थोड़ी मात्रा डालकर मिश्रण को चार घंटे तक पश्चवाहित किया गया। तत्पश्चात् विलयन का स्थिरक्वाथी (azeotropic) आसवन डीन तथा स्टार्क उपकरण में तब तक किया गया जब तक बेंजीन का अधिकांश समाप्त नहीं हुआ। अवशिष्ट विलयन को ठंडा करके लाइट पेट्रोलियम डाला गया तो ठोस विलग हो गया। इसे निकाल कर बेंजीन/लाइट पेट्रोलियम में से पुनः क्रिस्टलित किया गया। इससे श्वेत क्रिस्टल मिले (लब्धि 0.48 ग्राम 40%) जो शुद्ध पाइरैजोलोक्विनैजोलोन (III, R = – CH_3) के थे। विश्लेषण के फलस्वरूप N, 17.12% पाया गया जबकि $C_{13}H_{11}N_3O_2$ के लिये N 17.42% होना चाहिए। IR (स्ट्रेचिंग आवृत्तियाँ) 1660 cm^{-1} (क्विनैजोलोन कार्बोनिल), 1710 cm^{-1} (विवृत श्रृंखला कार्बोनिल)। 3000 cm^{-1} के आगे कोई अवशोषण नहीं पाया गया।

3-ऐसीटोऐसीटिल ऐमीनो-2-बेंजिल-3, 4-डाइहाइड्रो-4 आक्सो क्विनै जो लीनII, R = – CH_2 Ph)

3-ऐमीनो-2-बेंजिल-3-4, डाइहाइड्रो-4-आक्सोक्विनैजोलीन (2.5 ग्रा०) को पहले की तरह n- ब्यूटैनाल (25 मिली०) में ऐथिल ऐसीटोऐसीटोन (2 मिली०) के साथ अभिक्रियित किया गया। अभिक्रिया मिश्रण से प्राप्त ठोस पदार्थ को एथिल ऐसीटेट से पुनः क्रिस्टलित किया गया तो शुद्ध ऐसीटोऐसीटिल ऐमीनोक्विनैजोलोन (II, R – CH_2 Ph) के पीलाभ क्रिस्टल मिले। लब्धि 1.5 ग्रा०, 45%), गलनांक 186° C। विश्लेषण करने पर N 12.47% जबकि $C_{19}H_{17}N_3O_3$ के लिए N = 12.53% होना चाहिए।

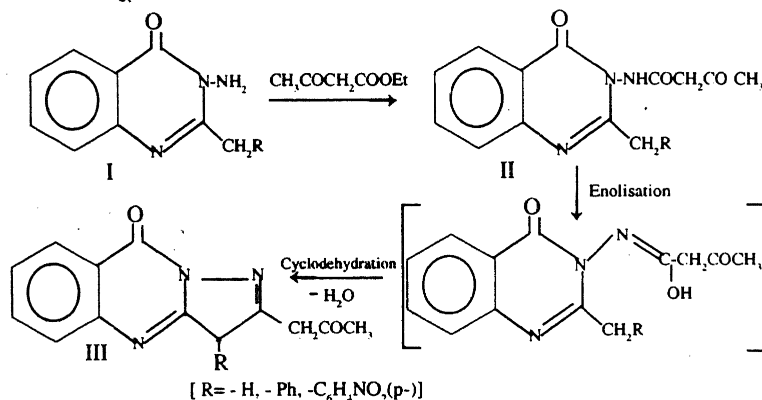
II (R = – CH_2 Ph) का पाइरैजोलोक्विनैजोलोन (III, R = – CH_3 pH) में साइक्लोडिहाइड्रेशन

3-ऐसीटोऐसीटिल ऐमीनो-2-बेंजिल-3-4, हाइड्रो-4-आक्सोक्विनैजोलीन (1.65) को शुष्क टोल्वीन (40 मिली) में जिसमें p-टोल्वीन सल्फोनिक अम्ल की थोड़ी मात्रा मिली थी 6 घंटे तक पश्चवाहित किया गया। तत्पश्चात् डीन तथा स्टार्क उपकरण द्वारा टोल्वीन की अधिकांश मात्रा हटा दी गई।

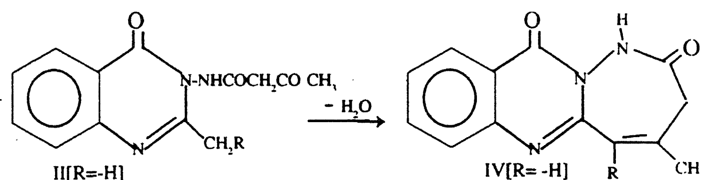
अवशिष्ट द्रव को ठंडा करके उसमें लाइट पेट्रोलियम मिलाया गया तो भूरा ठोस प्रकट हुआ। इसे छान कर विलग किया गया और एथिल ऐसीटेट से पुनः क्रिस्टलित करके हल्के भूरे क्रिस्टल प्राप्त किये गये जो पाइरैजोलोक्विनैजोलोन (III = $-CH_2Ph$) के थे। लब्धि 0.65 ग्रा० 40%, गलनांक $152^\circ C$। विश्लेषण करने पर N 13.14% प्राप्त हुआ जबकि $C_{19}H_{15}N_3O_2$ के लिए N 13.25% चाहिए। IR (स्ट्रेचिंग आवृत्तियाँ) 1680 cm^{-1} (क्विनैजोलोन कार्बोनिल संरचना), 1730 cm^{-1} (विवृत शृंखला कार्बोनिल)। 3000 cm^{-1} के ऊपर अवशोषण रिकार्ड नहीं हुआ।

परिणाम तथा विवेचना

तैयार करने की पूरी योजना नीचे प्रदर्शित है



3-ऐमीनो-2-3, 4-डाइहाइड्रो-4-आक्सोक्विनैजोलीन को उबलते n ब्यूटैनॉल में एथिलऐसीटोऐसीटेट के साथ पश्चवाहित करके तैयार किया गया। इससे निम्नलिखित प्रकार से साइक्लोडिहाइड्रेशन हुआ होगा।



इस तरह से क्रिस्टलीय ठोस प्राप्त हुआ। लब्धि 60% थी। इस उत्पाद का विश्लेषण किया गया तो दो प्रमुख अवशोषण 1600-1800 cm^{-1} क्षेत्र में प्राप्त हुए। पहला 1680 cm^{-1} पर जिसका स्कन्ध (Shoulder) क्विनैजोलोन कार्बोनिल तथा ऐमाइडी कार्बोनिल का था और दूसरा 1710 cm^{-1} पर था जो निश्चित रूप से नार्मल कार्बोनिल समूह के कारण था। 3410 cm^{-1} पर भी अवशोषण प्राप्त हुआ जो ऐमाइडी N–H स्ट्रेचिंग के कारण पाया गया। इसलिए उत्पाद 3-ऐसीटोऐसीटिल ऐमीनो-2 मेथिल-3, 4 डाइहाइड्रो-4-आक्सोक्विनैजोलीन था। इसे डीन तथा स्टार्क के उपकरण में शुष्क बेंजीन में जिसमें

सारणी 1

यौगिक	अणु-सूत्र	गलनांक	N का % प्राप्त	परिगणित	स्ट्रेचिंग आवृत्तियाँ ν_{max} (KBr)
I (R = -H)	$C_9H_9N_3O$	148–50	23.82	24.00	1670 cm^{-1} (क्विनैजोलोन कार्बोनिल) 3330, 3230 cm^{-1} (N–H बंधित)
II (R = –H)	$C_{13}H_{13}H_3O_3$	232	16.10	16.22	1680 cm^{-1} (क्विनैजोलोन तथा ऐमाइडी कार्बोनिल) 3410 cm^{-1} (N–H बंधित)
III (R = –H)	$C_{13}H_{11}N_3O_2$	168	17.21	17.42	1660 cm^{-1} (क्विनैजोलोन कार्बोनिल) 1710 cm^{-1} (विवृत कार्बोनिल) 3000 cm^{-1} के ऊपरअवशोषण नहीं
II (R = – Ph)	$C_{19}H_{17}N_3O_3$	186	12.47	12.53	
III (R = – Ph)	$C_{19}H_{15}N_3O_2$	152	13.14	13.25	1680 cm^{-1} (क्विनैजोलोन कार्बोनिल), 1730 cm^{-1} (विवृत कार्बोनिल) 3000 cm^{-1} के ऊपर अवशोषण नहीं
II[(R = $-C_6H_4NO_2$ (p–)]	$C_{19}H_{16}N_4O_5$	202–03	14.70	14.74	
III(R = $-C_6H_4NO_2$ (p–)	$C_{19}H_{14}N_4O_5$	192–93	15.55	15.47	1660 cm^{-1} (क्विनैजोलोन कार्बोनिल) 1720 cm^{-1} (विवृत कार्बोनिल) 3000 cm^{-1} के ऊपर अवशोषण नहीं

उत्प्रेरक रूप में चुटकी भर p-टोल्वीन सल्फोनिक अम्ल मिलाया गया था, साइक्लोडिहाइड्रेट किया गया। और तब स्थिरक्वाथी आसवन किया गया। स्पष्ट धुँधलापन दिखा जो इसका सूचक था कि साइक्लोडिहाइड्रेशन हुआ है। जो विलयन बचा उसमें से क्रिस्टलीय ठोस प्राप्त हुआ।

इस यौगिक के IR स्पेक्ट्रम से अब भी दो कार्बोनिल अवशोषण 1600-1800 cm^{-1} क्षेत्र में मिले। 1660 cm^{-1} पर अवशोषण क्विनैजोलोन कार्बोनिल का अभिलक्षण था और 1710 cm^{-1} पर मिला अवशोषण विवृत शृंखल कार्बोनिल समूह माना गया। 3000 cm^{-1} से ऊपर किसी भी प्रकार के अवशोषण की अनुपस्थिति अणु में किसी भी N–H समूह की अनुपस्थिति बताती है। इस तरह स्पष्ट हुआ कि यौगिक II (R = – H) साइक्लोडिहाइड्रेट नहीं हुआ जिससे आशानुरूप डायजेपिनोक्विनैजोलीन वलय प्रणाली IV (R = – H) नहीं बनी। चूँकि विश्लेषण से प्राप्त परिणाम यौगिक II से एक परमाणु जल की क्षति के अनुरूप हैं अतः साइक्लोडिहाइड्रेशन निश्चित रूप से –NHCO– ग्रुपिंग के एनोलीकरण के माध्यम से हुआ होगा जिससे पाइरैजोलो-4-आक्सोक्विनैजोलीन प्रणाली III (R ≡ H) बनी। IR स्पेक्ट्रम में 1600-1800 cm^{-1} क्षेत्र में दो कार्बोनिल अवशोषणों की उपस्थिति तथा 3000 cm^{-1} के ऊपर किसी N – H स्ट्रेचिंग अवशोषण की अनुपस्थिति से इस विचार की पुष्टि होती है।

उपर्युक्त प्रकार से ट्राइसाइक्लोक्विनैजोलोन वलय प्रणाली निश्चित करने में सफल होने के बाद हमने इस विधि को अन्य 4-आक्सोक्विनैजोलीनों (R = – Ph , $C_6H_4NO_2$ (p –) पर भी प्रयोजित किया। फलस्वरूप उनके ऐसीटोऐसीटिल ऐमीनो व्युत्पन्न तैयार किये गये और उसके बाद निर्जलित करके संगत पाइरैजोलोक्विनैलोजोन [III, R = – Ph , – $C_6H_4NO_2$ (p –)] तैयार किये गये। मध्यवर्ती तथा अन्तिम उत्पादों की पहचान तात्विक विश्लेषणों तथा IR स्पक्ट्रेमों द्वारा की गई। इन यौगिकों के गलनांक, प्रतिशत नाइट्रोजन तथा लाक्षणिक IR अवशोषण सारणी– I में दिये जा रहे हैं।

निर्देश

1. बोगर्ट तथा सील : J. Am. Chem. Soc. ; 1906 **28**, 884

2. जोसेफ क्लोसा : J. Prakt. Chem., 1966, **140**.

3. जार्ज, मेहता तथा तहिलरमानी : Ind. Jour. of Chem., 1971, **9**, 755.

4. बोगर्ट तथा बील : J. Am. Chem. Soc., 1912, **34**, 516.

5. मोहम्मद तथा एल हशास : Ind. Jour. of Chem. 1983, **22**(B), 85.

6. बोगर्ट तथा क्लार्क : J. Am. Chem. Soc. 1924, **46**, 1292

7. के० अडाची यकुगाकु : Chem. Abstr. 1940, **51**, 14745.

8. बोगर्ट तथा बील : J. Am. Chem. Soc. 1912, **34**, 3470.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No.4, October, 1999.

फोटोरेजिस्ट की प्रौद्योगिकी

महेश कुमार शर्मा

यंत्र अनुसंधान एवं विकास संस्थान, देहरादून (उ. प्र.)

[प्राप्त–सितम्बर 6, 1999]

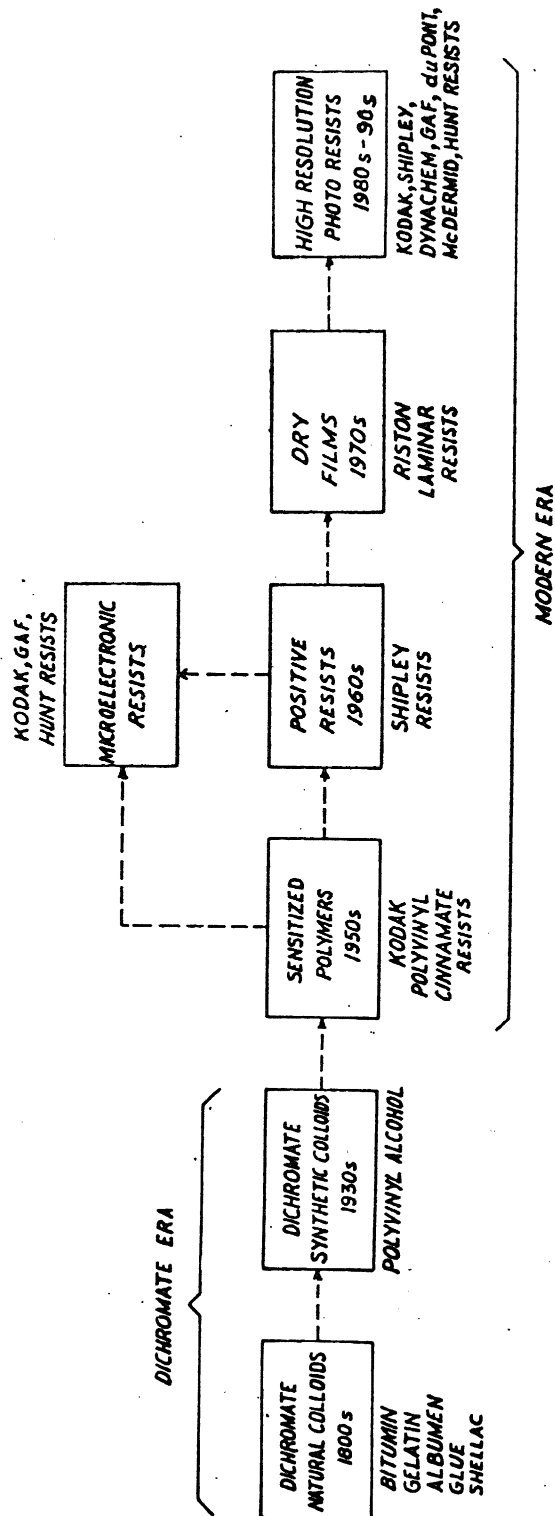
सारांश

आज विश्व में लगभग समस्त इलेक्ट्रॉनिक पद्धतियों, उपकरणों और युक्तियों के निर्माण के संविरचन अनुक्रम में फोटोरेजिस्ट (Photoresists) महत्वपूर्ण भूमिका अदा करते हैं। प्रस्तुत प्रपत्र में फोटोरेजिस्ट की प्रौद्योगिकी की सविस्तार व्याख्या की गई है। फोटोरेजिस्ट का इतिहास, बहुलकीकरण, फोटोरेजिस्ट के प्रकार और इनके उपयोगों का विवरण समाविष्ट किया गया है। नेगेटिव-कार्यकारी और पॉजिटिव कार्यकारी द्रव फोटोरेजिस्ट और सूखी-फिल्म फोटोरेजिस्ट के संघटन, गुण और प्रकार्य का वर्णन किया गया है।

Abstract

The technology of photoresists. *By* Mahesh Kumar Sharma, Instruments Research and Development Establishment, Dehra Dun (U. P.).

Photoresists are a cornerstone in the fabrication process of nearly all electronic systems, equipments and devices being manufactured in the world today. Present paper describes in detail the technology of photoresists. The description of history of photoresists, photopolymerization, different types of photoresists and their applications have been included. An account of the compositions, characteristics and functions of negative-acting and positive-acting liquid photoresists and dry-film photoresists have been discussed.



चित्र 1. फोटोरेजिस्ट का उद्भव

फोटोरेजिस्ट प्रकाशसुग्राही पदार्थ हैं[1] जिनका महत्व इलेक्ट्रॉनिकी उद्योग के साथ बढ़ा है क्योंकि सरल से सरल इलेक्ट्रॉनिक उपकरणों के निर्माण में फोटोरेजिस्ट का प्रयोग होता है।

प्रकाश सुग्राही रेजिस्ट, कार्बनिक विलायकों में रेजिन के घोल होते हैं जिनमें सुग्राहक तथा योज्य पदार्थ मिले होते हैं[2]। ये वांछित अवस्तर पर लेपन व सुखाने के पश्चात् प्रकाश-सुग्राही बन जाते हैं। एक्स्पोजर के बाद, डेवेलप करने से रेजिस्ट लेपन के अनावश्यक क्षेत्र दूर हो जाते हैं और प्रतिरोध पैटर्न बन जाता है जिसमें अति उच्च रासायनिक प्रतिरोधी गुण होते हैं।

फोटोरेजिस्ट में निम्नलिखित गुण होने चाहिए[3]: यह प्रकाश सुग्राही होना चाहिए, इसमें रासायनिक प्रतिरोधी और फिल्म बनाने के गुण होने चाहिए, इसे अवस्तर पर चिपकना चाहिए और साथ ही सामान्यतः इसे एक्स्पोज और बिना एक्स्पोज अवस्थाओं में विलायक-घुलनशील होना चाहिए ताकि सरलता से इसका लेपन व डेवेलप किया जा सके।

इतिहास

फोटोरेजिस्ट के उद्‌भव को दो युगों में बाँटा जा सकता है–डाइक्रोमेट काल तथा आधुनिक काल। फोटोरेजिस्ट के क्षेत्र में महत्वपूर्ण आविष्कार हुये हैं[4] जिनमें से कुछ चित्र (1) में दिखाये गये हैं।

आधुनिक युग के फोटोरेजिस्ट का विकास मुख्यतः छपाई उद्योग की प्रौद्योगिकी से हुआ है जहाँ फोटोरेजिस्ट पिछली लगभग डेढ़ शताब्दियों से जाने जाते थे[5]। 1826 में सर्किट बोर्ड और माइक्रोसर्किट के बारे में स्वप्न में भी सोचा नहीं जा सकता था, जब फ्रांस के शोलोन्स–सुर–साओन देहात में रहने वाले जोजेफ नाइसफोर नीप्स ने पाया[6] कि कुछ प्रकार के ऐस्फाल्ट प्रकाश सुग्राही थे और उन्होंने प्यूटर पर पैटर्न सफलतापूर्वक निक्षारित किये। फ्रांस के ए० ई० बैक्यूरेल[7] ने 1840 में पाया कि स्टार्च पहला प्राकृतिक कार्बनिक कोलॉइड था जिसे अविलेयीकृत किया जा सकता था परन्तु बाद में यह पाया गया कि प्रोटीन, कार्बोहाइड्रेट और शैलक को डाइक्रोमेट से सुग्राहीकृत किया जा सकता था[8]।

फोटोरेजिस्ट के उद्‌भव में डाइक्रोमेट युग के प्रथम चरण में सबसे महत्वपूर्ण खोज अंग्रेज वैज्ञानिक विलियम हेनरी फौक्स टालबौट ने 1852 में की थी जिन्होंने एक फोटोएचिंग विधि का पेटेंट लिया था (ब्रिटिश पेटेंट 565) जिसे कॉपर पर इस्तेमाल किया जा सकता था[9]। फोटोरेजिस्ट डाइक्रोमेट लवण से सुग्राहीकृत जिलेटिन थी और फेरिक क्लोराइड घोल को निक्षारक की तरह प्रयोग किया गया था। डाइक्रोमेट से सुग्राहीकृत प्रोटीन जैसे जंतु व मछली की सरेस, रक्त तथा अंडा एल्ब्यूमिन, केसीन तथा जिलेटिन और कार्बोहाइड्रेट यथा पॉलिसैकेराइड गोंद (बबूल का गोंद) और स्टार्च फोटोरेजिस्ट के समान इस्तेमाल में लाये गये।

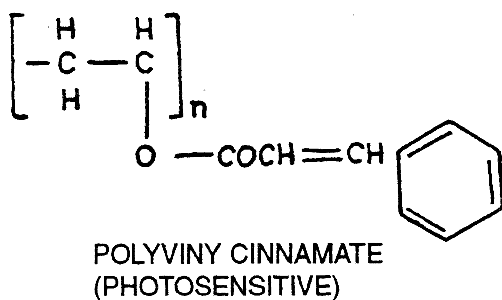
फोटोरेजिस्ट प्रौद्योगिकी के उद्‌गम में डाइक्रोमेट युग के दूसरे चरण में संश्लेषित प्रकाश सुग्राही पॉलीमर के आविष्कार हुए[10]। पॉलिविनाइल ऐल्कोहॉल (पी० वी० ए०), पॉलिविनाइल पाइरोलिडोन तथा पॉलिविनाइल ब्यूटाइरल को डाइक्रोमेटों से सुग्राहीकृत किया जा सकता था। इस विलयनों की

एकरूपता तथा निधानी-आयु अपने प्राकृतिक प्रतिरूपों की तुलना में अधिक उत्तम थी। इंग्लैड के पॉल आइसलर ने 1959 में डाइक्रोमेट द्वारा सुग्राहीकृत पी वी ए फोटोरेजिस्ट का इस्तेमाल किया[11] और ब्रिटिश रसायनज्ञ बी० वुड्स ने 1968 में भी इन प्रकाश प्रतिरोधकों का प्रयोग किया[12]।

1960 के दशक में, डाइक्रोमेट से सुग्राहीकृत पी वी ए या जिलेटिन का उपयोग स्क्रीन प्रोसेस प्रिंटिंग में स्क्रीन स्टेन्सिल बनाने के लिए किया गया[13]। डाइक्रोमेट से सुग्राहीकृत रेजिस्ट सामान्यतः नेगेटिव-कार्यकारी रेजिस्ट होते हैं।

1950 के दशक और 1960 के दशक के आरम्भ के अनेक उपयोगों की सम्पूर्ण आवश्यकताओं को पूरा करने में डाइक्रोमेट-रेजिस्ट अपने प्रक्रम से संबन्धित समस्याओं और अन्य कमियों के कारण असमर्थ रहे। आधुनिक युग का पहला फोटोरेजिस्ट कोडक फोटोरेजिस्ट (के पी आर) –नेगेटिव कार्यकारी फोटोरेजिस्ट था, जिसका अन्वेषण अमेरिका की ईस्टमैन कोडक कम्पनी ने 1953 में किया[14]। इसके आविष्कार से फोटोरेजिस्ट के उद्भव में आधुनिक युग का जन्म हुआ। इसमें सिनामिक ऐसिड व्युत्पन्नों का इस्तेमाल होता है जो स्वतः प्रकाश-सुग्राही यौगिक हैं। सिनामेट यौगिक, साधारणतः सिनामौएल क्लोराइड को, पॉलीमर पदार्थों से क्रिया करा कर प्रकाश-सुग्राही एस्टर तथा कीटोन बनाये जाते हैं जिनका अणुभार अधिक होता है। इनमें अच्छी विलायकता तथा उत्तम फिल्म बनाने के गुण होते हैं।

के० पी० आर० रेजिन, पॉलिविनाइल ऐल्कोहॉल का सिनामेट एस्टर है (चित्र 2)। के० पी० आर० की निधानी-आयु लगभग अनिश्चित होती है और विलेपित अवयवों के एक्स्पोजर व डेवेलपमेन्ट से पहले काफी अधिक समय तक संचित किया जा सकता है क्योंकि इसमें पुराने प्रतिरोधकों के समान "अदीप्त अभिक्रिया" नहीं होती है। डाइक्रोमेट रेजिस्ट की तुलना में, के० पी० आर० के प्रक्रम प्राचलों पर साधारण ताप व आर्द्रता का बहुत कम प्रभाव पड़ता है। रेजिस्ट प्रतिबिम्ब तुलनात्मक रूप में कठोर होता है, रासायनिक प्रतिरोध अधिक होता है और इसका इस्तेमाल प्लेटिंग या एचिंग रेजिस्ट की तरह किया जा सकता है। यह पाया गया कि फोटोरेजिस्ट प्रतिबिम्ब काफी यथार्थ थे और रजिस्ट्रेशन व अनुयोजन की अनेक समस्याएँ दूर हो गईं। के० पी० आर० के बाद, कोडक कम्पनी ने तेजी से बढ़ते हुए विभिन्न उद्योगों की आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए फोटोरेजिस्ट की एक श्रृंखला प्रस्तुत की[15]।



चित्र–2. पॉलिविनायल सिनामेट (के० पी० आर० रेजिन)

1960 के दशक के आरम्भ में, अमेरिका की शिप्ले कम्पनी ने पॉजिटिव-कार्यकारी फोटोरेजिस्ट की खोज करके फोटोरेजिस्ट प्रौद्योगिकी के विकास में महत्वपूर्ण उपलब्धि हासिलकी [16]। यद्यपि पॉजिटिव रेजिस्ट अपेक्षाकृत नये हैं परन्तु इसमें उपयुक्त होने वाले प्राथमिक अंश, फोटोसुग्राहक जैसे ऐरोमैटिक आर्थोक्वीनोन डाइएजाइड का इस्तेमाल दूसरे प्रकार के चित्रोत्पादन यथा डाइएजो पाजिटिव प्रिन्ट बनाने में अनेक वर्षों तक होता रहा[18]। अधिकतर पाजिटिव फोटोरेजिस्ट का उद्‌गम जर्मनी की काले कम्पनी और इसकी सहायक अमेरिकन कम्पनी एजोप्लेट कारपोरेशन में आरम्भ में हो रहे लिथोग्राफिक प्लेट कार्य से हुआ[18]। शुरू में शिप्ले पाजिटिव फोटोरेजिस्ट यथा ए जेड–15 और ए जेड–17 में के० पी० आर० की तुलना में पूरी तरह रासायनिक प्रतिरोध नहीं था परन्तु वे अति परिशुद्ध, संसाधन में आसान (बिना जलीय डेवेलपर तथा रंजन क्रम के) थे और इन्हें शीघ्रता से सतह से हटाया जा सकता था[19], यद्यपि इस कमी को वर्तमान पाजिटिव फोटोरेजिस्ट में दूर कर दिया गया है।

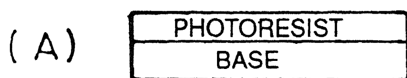
सन् 1962 में अमेरिका के डाइनाकैम कॉरपोरेशन ने भिन्न-भिन्न प्रकार के फोटोरेजिस्टों का निर्माण किया[20]। अमेरिका की पी० ए० हन्ट कम्पनी तथा जी० ए० एफ० और अन्य कम्पनियों ने 1967 में अलग-अलग तरह के प्रकाश-प्रतिरोधक बाजार में प्रस्तुत किये[21, 22].

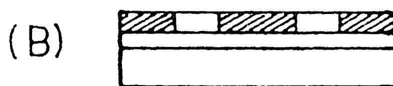
1968 में अमेरिका की डू पौन्ट कम्पनी ने सूखी-फिल्म फोटोरेजिस्ट का निर्माण कर फोटोरेजिस्ट प्रौद्योगिकी के क्षेत्र में एक महत्वपूर्ण अध्याय जोड़ा[23]। डू पौन्ट द्वारा रिस्टन सूखी फिल्म के निर्माण के तुरन्त बाद, अमेरिका के डाइनाकैम कॉरपोरेशन ने सूखी-फिल्म फोटोरेजिस्ट की लैमिनर श्रेणी प्रस्तुत की[20]। इन रेजिस्टों में सैन्डविच संरचना होती है जिनमें बाहरी सतही परत एक महीन पारदर्शी माइलर फिल्म की बनी होती है जो आंतरिक प्रकाश-सुग्राही विलेपित परत को एक्स्पोजर तक सुरक्षा प्रदान करती है। यह एक्स्पोजर से पहले या इसके दौरान, विलेपित परत की अखंडता पर धूल व अन्य संदूषित कणों के प्रभाव को रोकती है और ऑक्सीजन के प्रभाव को दूर करती है। इसका कुल परिणाम सूक्ष्म छिद्रों व अन्य त्रुटियों को कम या दूर करना है। सूखी-फिल्म फोटोरेजिस्ट का एक अन्य लाभ यह है कि स्वचालित प्रक्रमों में इसका इस्तेमाल अच्छी तरह किया जा सकता है क्योंकि इसे लैमिनेशन विधि द्वारा लगाया जाता है।

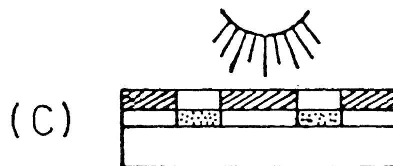
कोडक[24], शिप्ले[25], डाइनाकैम[20], जी ए एफ [22], डू पौन्ट[23], हन्ट केमिकल[21], मैक्डरमिड[26] और अन्य कम्पनियाँ विभिन्न उपयोगों के लिए नये-नये प्रकार के उच्च विभेदन के नेगेटिव–कार्यकारी और पाजिटिव–कार्यकारी द्रव तथा सूखी–फिल्म फोटोरेजिस्टों का निर्माण निरन्तर कर रही हैं। भारत में भी कुछ प्रतिष्ठानों ने नेगेटिव-कार्यकारी द्रव फोटोरेजिस्ट बनाये हैं।

फोटोरेजिस्ट के प्रारूप

प्रकाश-सुग्राही रेजिस्ट मलूतः दो प्रकार के होते हैं : नेगेटि-कार्यकारी[27] तथा पाजिटिव कार्यकारी[28]। नेगेटिव कार्यकारी पद्धति में रेजिस्ट का एक्स्पोज भाग डेवेलपमेन्ट के बाद सतह पर रहता है और स्टेन्सिल बनाता है जबकि पाजिटिव-कार्यकारी पद्धति में रेजिस्ट का बिना एक्स्पोज हुआ भाग डेवेलपमेन्ट के बाद सतह पर रहता है और स्टेन्सिल बनाता है।



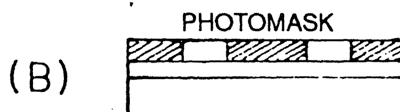


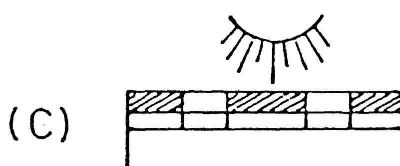


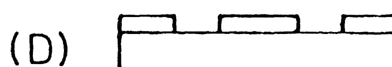


चित्र–3. नेगेटिव–कार्यकारी गीली–फिल्म फोटोरेजिस्ट प्रक्रम









चित्र–4. पोजिटिव–कार्यकारी गीली–फिल्म फोटोरेजिस्ट प्रक्रम

चित्र (3) में नेगेटिव-कार्यकारी फोटोरेजिस्ट विधि दिखाई गई है। नेगेटिव रेजिस्ट, अधः स्तर पर महीन परत की तरह समरूप से लगाया जाता है और पूर्ण रूप से सुखा कर प्रीबेक किया जाता है (चित्र 3–A)। वांछित पैटर्न को चिन्हित करते हुए पारदर्शी प्रतिबिम्ब क्षेत्र से युक्त फोटोमास्क या फोटोग्राफिक पारदर्शी चित्र को वैक्यूम फ्रेम या यांत्रिक तरीकों की सहायता से फोटोरेजिस्ट सतह के निकट सम्पर्क में लाया जाता है (चित्र 3-B)।

फोटोरेजिस्ट सतह पर फोटोमास्क को लगाकर रेजिस्ट को अल्ट्रावायलेट विकिरणों से युक्त प्रकाश स्रोत से एक्सपोज किया जाता है। फोटोमास्क के साफ क्षेत्रों के नीचे रेजिस्ट फिल्म में भौतिक व रासायनिक परिवर्तन होता है और क्रॉस-बन्धन या बहुलीकृत होकर यह डेवेलपमेन्ट विलयन में अघुलनशील हो जाती है (चित्र 3-C)। एक्स्पोजर के पश्चात् रेजिस्ट लेपित आधार को डेवेलपमेन्ट घोल में डुबोया जाता है जिससे बिना एक्स्पोज हुए क्षेत्र घुल कर दूर हो जाते हैं और एक्स्पोज या कठोर क्षेत्र पर बहुत अधिक प्रभाव नहीं पड़ता है। पारदर्शी चित्र के अपारदर्शी क्षेत्र मास्क की तरह कार्य करते हैं और वे भाग जिन पर एक्स्पोजर नहीं पड़ता है, डेवेलपर में घुल जाते हैं। घुलनशील भाग घुल कर

अलग हो जाते हैं और सतह पर कठोर व रासायनिक प्रतिरोधक सूक्ष्म उभरा हुआ प्रतिबिम्ब रह जाता है। इस प्रतिबिम्ब को पोस्टबेकिंग द्वारा गर्म कर और दृढ़ किया जा सकता है तथा रंजन द्वारा अधिक स्पष्ट दृष्टिगोचर बनाया जा सकता है। यह प्रतिबिम्ब एचिंग, प्लेटिंग या अन्य प्रकार के सतही परिवर्तन के लिए स्पष्ट निश्चित आवरण की तरह इस्तेमाल किया जा सकता है (चित्र 3-D)।

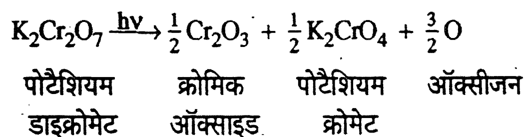
पाजिटिव-कार्यकारी फोटोरेजिस्ट विधि चित्र (4) में दिखाई गई है। वांछित पैटर्न को चिन्हित करते हुए आपारदर्शी प्रतिबिम्ब क्षेत्र से युक्त फोटोमास्क को अधःस्तर पर पाजिटिव-कार्यकारी फोटोरेजिस्ट की पूरी तरह से सूखी और पूर्व-बेक एकसमान महीन सतह के निकट सम्पर्क में लाया जाता है (चित्र 4-A, B)। नेगेटिव रेजिस्ट के समान अन्त में सतह पर समान परिणाम प्राप्त करने के लिए पाजिटिव फोटोरेजिस्ट के लिए पारदर्शी चित्र में प्रतिबिम्ब की अवस्था ठीक विपरीत होनी चाहिए।

रेजिस्ट सतह पर फोटोग्राफिक पारदर्शी चित्र को लगाकर, रेजिस्ट को अल्ट्रावायलेट विकिरणों से युक्त प्रकाश स्रोत से एक्स्पोज किया जाता है (चित्र 4-C)। फोटोमास्क के साफ क्षेत्रों के नीचे रेजिस्ट फिल्म में रासायनिक परिवर्तन होता है और विलेयीकरण होकर यह डेवेलपर में घुल जाती है। बिना एक्स्पोज हुए रेजिस्ट क्षेत्र डेवेलपर में अघुलनशील होते हैं (चित्र 4-D)। डेवेलपमेन्ट के पश्चात् अधिक रासायनिक प्रतिरोध के लिए रेजिस्ट प्रतिबिम्ब को पश्च-बेक किया जाता है। पाजिटिव रेजिस्ट प्रतिबिम्ब को साधारणतः रंजित नहीं किया जाता है।

प्रकाश–बहुलकीकरण

एक्स्पोजर के पश्चात्, डेवेलपर घोल में फोटोरेजिस्ट का घुलना अथवा न घुलना प्रत्यक्ष रूप से महत्वपूर्ण प्रक्रम है। डाइक्रोमेटेड रेजिस्ट को छोड़कर आधुनिक फोटोरेजिस्ट रेजिन पद्धति में प्रकाश-बहुलकीकरण होता है[29]।

डाइक्रोमेट से सुग्राहीकृत नेगेटिव प्रकार के फोटोरेजिस्ट में सुग्राहीकरण के लिए पोटैशियम डाइक्रोमेट या अन्य डाइक्रोमेट, जिलेटिन, पी वी ए अथवा रेजिनी कोलॉइडी घोल में डाले जाते हैं। यहाँ क्रोमियम आयन को Cr^{6+} के रूप में मिलाया जाता है। विलायक घोल से आयन कोलॉइड में निक्षेपित होता है और कोलॉइड से प्रत्यक्ष रूप से क्रिया नहीं करता है। कोलॉइड घोल की उपस्थिति में षट्संयोजक क्रोमियम आयन द्वारा प्रकाश का अवशोषण प्रकाश-रासायनिक प्रक्रम आरम्भ करता है। प्रकाश क्वान्टम के अवशोषण के बाद Cr आयन किसी निचली आयनन स्थिति में अपचित हो जाता है। 3^+ और 6^+ के मध्य विभिन्न आयनन अवस्थाएँ बनने की अनेक प्रक्रियाएँ प्रस्तावित की गई हैं[30]। अन्तिम उत्पाद, त्रिसंयोजक क्रोमियम आयन से युक्त क्रोमियम ऑक्साइड (Cr_2O_3) बनता है :



$$K_2Cr_2O_7 \xrightarrow{h\nu} \frac{1}{2}Cr_2O_3 + \frac{1}{2}K_2CrO_4 + \frac{3}{2}O$$

क्रोमियम आयन का कोलॉइड के ध्रुवीय भाग से क्रिया के कारण कोलॉइडी अणुओं का क्रॉस-बन्धन होता है जिससे एक्स्पोज रेजिस्ट का प्रकाश-रासायनिक कठोरीकरण हो जाता है। उदाहरणतः डाइक्रोमेट से सुग्राहीकृत जिलेटिन में क्रोमिक आयन ध्रुवीय कार्बोक्सिलेट ग्रुप – COO – के साथ समन्वयी संकुल बनाते हैं[31]। यह संकुल जिलेटिन शृंखला के मध्य क्रॉस-बन्धन होता है जिससे एक्स्पोज रेजिस्ट को कठोरता और रासायनिक प्रतिरोध प्राप्त होता है।

आधुनिक काल के फोटोरेजिस्ट में प्रकाश-बहुलीकरण का प्रयोग एकलक के फोटॉन प्रेरित बहुलकीकरण और पॉलीमर के क्रॉस-बन्धन दोनों के लिए होता है[32] जिससे एक्स्पोज क्षेत्र कार्बनिक विलायकों में अघुलनशील हो जाते हैं (नेगेटिव-कार्यकारी फोटोरेजिस्ट) अथवा जलीय डेवेलपर में घुलनशील हो जाते हैं (पाजिटिव-कार्यकारी फोटोरेजिस्ट)।

पॉलीमर अणुओं से युक्त पदार्थ होता है जो कम अणुभार की इकाइयों-एकलक– से बने लगभग बहुगुणक होते हैं। आइसोमेरिक पॉलीमर वे पॉलीमर होते हैं जिनमें सामान्यतः वही प्रतिशत संरचना होती है परन्तु अणुओं के भीतर व्यष्टिगत परमाणुओं अथवा परमाणुओं के ग्रुप का विन्यास अलग होता है। आइसोमेरिक सह-पॉलीमर में शृंखला के साथ-साथ विभिन्न एकलकों के वितरण में अन्तर होता है यद्यपि इनका समस्त संघटन समान होता है।

एकलक के प्रकाश-बहुलकीकरण में शृंखला-अभिक्रिया होती है जिसमें काफी अधिक अणु आपस में क्रिया करके उच्च अणुभार का पदार्थ बनाते हैं[33]। यदि अघुलनशीलता की आवश्यकता होती है तो एकलक मिश्रण में बहुक्रियात्मक एकलक मिलाया जाता है ताकि क्रॉस-बन्धन हो सके। कुछ अशुद्धियों अथवा ऑक्सीजन प्रभाव द्वारा शृंखला के उद्‌भव की समयपूर्व समाप्ति के कारण कम अणु भार का पदार्थ बनता है जिसकी घुलनशीलता उच्च अणुभार पॉलीमर से बिल्कुल भिन्न होती है।

प्रकाश-प्रेरित बहुलकीकरण में प्रकाश की उपस्थिति में प्रारंभिक विशिष्ट पदार्थ के जनन की आवश्यकता होती है। प्रकाश-बहुलकीकरण अभिक्रिया एकलक तक सीमित होती है जिसमें मुक्त मूलक प्रेरण व संचरण होता है जबकि कमरे के ताप पर मुक्त मूलकों का जनन तब होता है जब अनेक कार्बनिक या अकार्बनिक यौगिकों को प्रकाश द्वारा एक्स्पोज किया जाता है। मुक्त मूलकों के प्रत्यक्ष स्रोत के साथ-साथ जो बहुलकीकरण प्रेरण की क्षमता रखते हैं, अनेक यौगिक प्रकाश-सुग्राही होते हैं। ये प्रकाश स्रोत से एक्स्पोज होने पर उच्चतर ऊर्जा स्तर पर उत्तेजित हो जाते हैं और अग्रिम मूलक के अपघटन को प्रेरित करते हैं [34]।

नेगेटिव-कार्यकारी फोटोरेजिस्ट

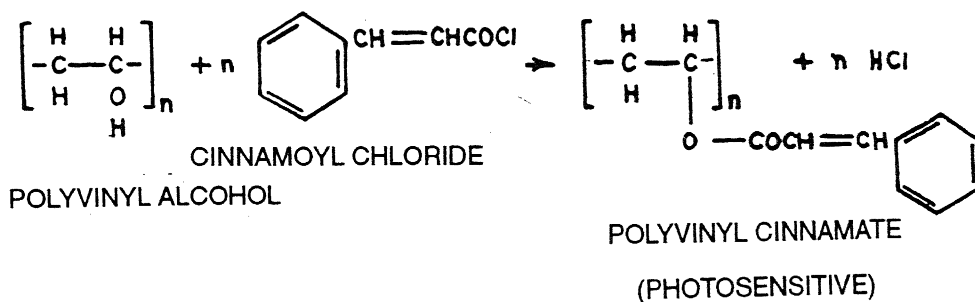
आधुनिक काल के नेगेटिव–कार्यकारी गीली–फिल्म फोटोरेजिस्टों (1950 से) में अभिलक्षणिक रूप से उच्च रासायनिक प्रतिरोधक तथा अच्छे प्रतिबिम्ब पुनरुत्पादन गुण होते हैं[35]। इन रेजिस्टों में मुख्यतः चार अवयव होते हैं : (अ) फिल्म निर्माणकारी रेजिन (ब) सुग्राहक या प्रकाश-प्रेरक जो प्रकाश ऊर्जा अवशोषित कर अघुलनशील अभिक्रिया आरम्भ करते हैं, (स) संकलक जो रेजिस्ट के निष्पादन को

बढ़ाते या सुधारते हैं, तथा (द) विलायक पद्धति।

नेगेटिव फोटोरेजिस्ट में यह आवश्यक नहीं है कि रेजिन प्रकाशसुग्राही हो परन्तु अवशोषित प्रकाश ऊर्जा से उत्तेजित सुग्राहीकृत अणु के साथ क्रिया कर इसमें अघुलनशीलता की क्षमता होनी चाहिए। नेगेटिव रेजिस्ट रेजिन में कुछ मूल गुण होने चाहिए[36] : (अ) ऐक्टिनिक प्रकाश से एक्स्पोजर होने पर रेजिन अघुलनशील हो जानी चाहिए, (ब) एक्स्पोजर से पहले रेजिन विलायक पद्धति में घुलनशील होनी चाहिए, (स) रेजिन में गीलेपन और अनेक सतहों पर आसंजन की क्षमता होनी चाहिए, (द) विलायक पद्धति के वायु वाष्पन के बाद, विलायक में अपनी घुलनशीलता खोये बिना, रेजिन को एकसमान संसक्त फिल्म बनानी चाहिए, और (य) संसाधित रेजिन प्रतिबिम्ब जलीय घोलों में प्रतिरोधी होना चाहिए।

एक्स्पोजर के बाद, रेजिन के प्रकाश-बहुलकीकरण या क्रॉस-बन्धन से, इसका कठोरपन, रासायनिक प्रतिरोधकता तथा सतह पर आसंजन बढ़ता है[37]। जब एक्स्पोज भाग डेवेलपर में डुबाया जाता है तो वे भाग जिन पर प्रकाश नहीं पड़ता है, उनमें प्रारंभिक रैखिक विलेयता विद्यमान रहती है और डेवेलपर में घुलकर अलग हो जाते हैं। पूर्णतया एक्स्पोज भागों का बहुलकीकरण होकर, वे अपनी विलेयता खो देते हैं और डेवेलपमेन्ट अभिक्रिया का उन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। इस प्रकार डेवेलपर में एक्स्पोज और बिना एक्स्पोज हुए भागों की वरणात्मक विलेयता के कारण नेगेटिव प्रतिबिम्ब बन जाता है।

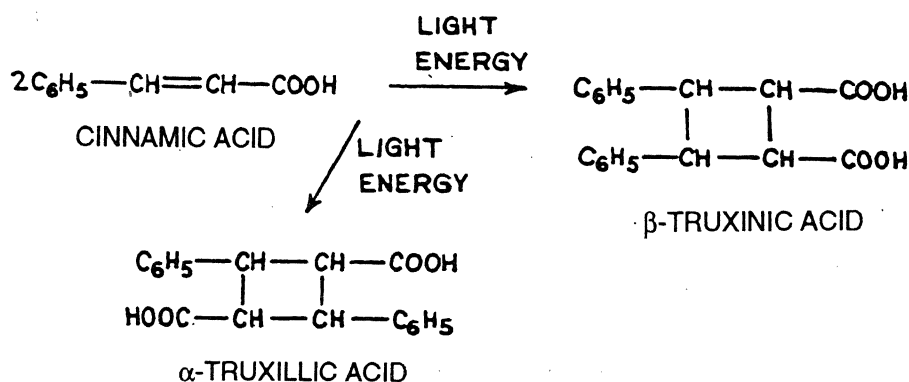
नेगेटिव-कार्यकारी द्रव फोटोरेजिस्ट में प्रयोग हो रहे कुछ ज्ञात रेजिन पद्धति निम्मलिखित हैं[38]: पॉलिविनायल सिनामेट अवकलज, विनायल एस्टर युक्त सिनामाइलिडीन, एलायल एस्टर प्रिपॉलिमर यथा डाईएलायल थैलेट और आइसोथैलेट, चक्रित रबर (पॉलिआइसोप्रीन) अवकलज, हाइड्रोकार्बन सहपॉलीमर, इत्यादि।



चित्र–5. पॉलिविनायल सिनामेट का बनना

आधुनिक काल का सबसे महत्वपूर्ण और पुराना नेगेटिव फोटोरेजिस्ट पॉलिविनायल सिनामेट है। 1951 से आरम्भ करके, अमेरिका के एल० एम० मिन्स्क और सहयोगियों ने पॉलिविनायल सिनामेट तथा अन्य पॉलिविनायल ऐल्कोहॉल के असंतृप्त एस्टर युक्त प्रकाश-सुग्राही समिश्रण बनाने की विधियाँ पेटेंट कीं [39-42]। पॉलिविनायल सिनामेट को, पॉलिविनायल ऐल्कोहॉल और सिनामौएल क्लोराइड की पिरिडीन विलायक की उपस्थिति में क्रिया करा कर सफलतापूर्वक बनाया जा सकता है (चित्र-5)। पॉलिविनायल सिनामेट के गुणों को एस्टीकरण की मात्रा और विनायल श्रृंखला की लम्बाई को नियंत्रित कर काफी परिवर्तित किया जा सकता है।

पॉलिविनायल सिनामेट की प्रकाश सुग्राहिकता सिनामौएल ग्रूप की अभिक्रियाशीलता पर निर्भर करती है। एक्स्पोजर के बाद, सिनामिक एसिड, फोटोडाइमेराइज होकर, a- ट्रक्सिलिक एसिड तथा b-ट्रक्सिलिक एसिड (b-आइसोट्रक्सिलिक एसिड) बनाती है जो साइक्लोब्यूटेन के अम्ल अवकलज हैं (चित्र-6)। एक्स्पोजर के बाद पॉलिविनायल सिनामेट (औसत अणुभार 20,000) के फोटोक्रॉस-बन्धन की विधि चित्र-7 में दिखाई गई है।



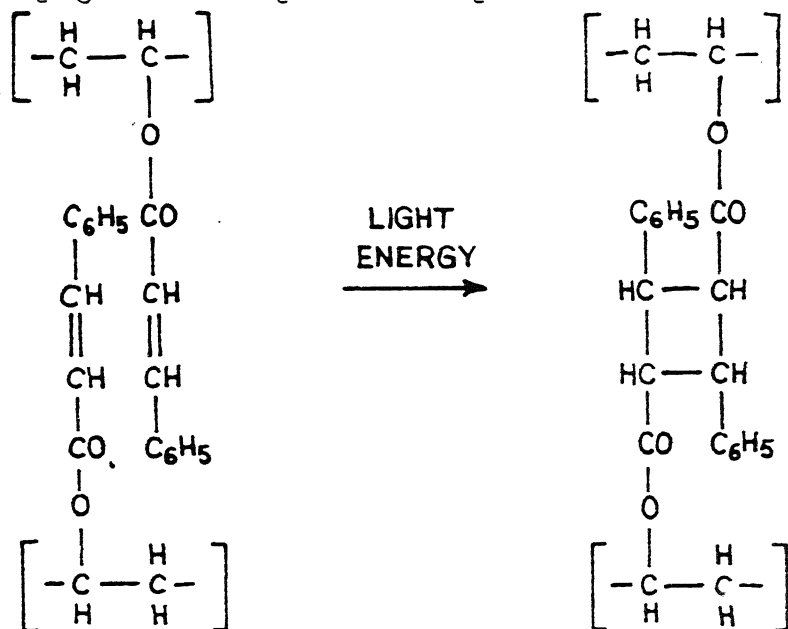
चित्र–6. सिनामिक एसिड का फोटोडाइमेराइजेशन

फोटोरेजिस्ट का दूसरा घटक, सुग्राहक या फोटोप्रारंभक, फोटोरेजिस्ट सम्मिश्रण का प्रमुख भाग होता है[43] और यह सभी फोटोरेजिस्ट सम्मिश्रणों में विद्यमान रहता है। यद्यपि रेजिन में आन्तरिक सुग्राहिकता हो सकती है जो एक्स्पोजर काल को कम कर सकती है तथा एकसमानीकरण में सुधार ला सकती है।

अनुकूल तरंगदैर्घ्य की प्रकाश ऊर्जा अवशोषित कर सुग्राहक सक्रिय हो जाते हैं। यह तरंगदैर्घ्य अधिकतर निकट पराबैंगनी क्षेत्र (2000-4000 Å) में होती है।

फोटो-सक्रिय होने पर, सुग्राहक अणु "उत्तेजित" अवस्था में रहता है। इस स्थिति में कोई भौतिक परिवर्तन नहीं होता है, परन्तु अणु में उन अभिक्रियाओं के होने की क्षमता होती है जो सामान्य या मूल-स्तर, ऊर्जा स्थिति में नहीं हो सकती है। उत्तेजित अथवा सक्रिय अवस्था में, सुग्राहक में जो

वास्तविक प्रकाश-रासायनिक अभिक्रियाएं होती हैं, वे काफी जटिल होती हैं परन्तु असल परिणाम यह होता है कि सुग्राहक, पॉलीमर अणु को ऊर्जा स्थानान्तरण करता है जिससे असंतृप्त ग्रुप का विसंबद्ध होने के बाद अविलेयीकरण हो जाता है। रेजिन पद्धति का अविलेयीकरण रैखिक अणुओं के क्रॉस-बन्धन अथवा असंतृप्त ग्रुप के सक्रियण से शृंखला संचरण और वृद्धि द्वारा होता है[44]।



चित्र–7. पॉलिविनायल सिनामेट का फोटोक्रॉस–बन्धन

प्रकाश-सुग्राहिकता के साथ-साथ सुग्राहक में कुछ भौतिक गुण होने चाहिए। प्रकाश-सक्रियण से पहले सुग्राहक रेजिन की उपस्थिति में घोल अथवा सूखी फिल्म की दशा में अधिक संग्रह अवधि तक स्थायी रहना चाहिए। विलयन में और अनुप्रयोग के दौरान सुग्राहक में अवक्षेपण, क्रिस्टलन अथवा वरना स्वयं सांद्रण की प्रवृत्ति नहीं होनी चाहिए। साथ ही रेजिन तथा सुग्राहक सामान्य विलयनों में घुलने चाहिए।

अनेक यौगिक फोटोरेजिस्ट रेजिन को निकट-पराबैंगनी क्षेत्र में सुग्राहीकृत करते हैं तथा सम्मिश्रण की प्रकाश-सुग्राहिकता को काफी अधिक बढ़ाते हैं। कुछ मूल प्रकार के सुग्राहक निम्नलिखित हैं : थायाजोलिन यौगिक, एजीडो यौगिक, नाइट्रोऐनिलीन अवकलज, ऐनथ्रोन, क्विनोन, डाइफिनाइल, ट्राइ-फिनाइलमिथेन रंजक आदि।

रेजिस्ट सम्मिश्रणों के तीसरे घटक, संयोजकों में निम्मलिखित गुण होने चाहिए [45] : यह विलेपन सतह पर मैलफेन बनने को दूर करता है, आसंजन को बढ़ाता है, बेकिंग के दौरान तापीय बहुलकीकरण को नियंत्रित करता है, डेवेलपमेन्ट के समय फूलने और अन्य संबन्धित समस्याओं को कम करता है,

जिससे ये नेगेटिव फोटोरेजिस्ट के निष्पादन में सुधार लाते हैं या बढ़ाते हैं। संयोजकों के उदाहरण निम्नलिखित हैं : ट्राइएथेनॉलेमीन, स्थायीकारक (फीनॉल), अपचायक (हाइड्रोक्विनोन), नोवोलैक, कार्बनिक अम्ल (बेन्जोइक एसिड) और संबन्धित पदार्थ।

रेजिन तथा रचकों को बनाने में रासायनिक विलायकों का इस्तेमाल होता है[46]। ये भण्डारण और अनुप्रयोग के दौरान उन्हें घोल में बाँध कर रख सकते हैं और डेवेलपमेन्ट तथा संबन्धित संसाधनों में विलायकों का प्रयोग होता है। कुछ सामान्य विलायक निम्नलिखित हैं : सेलोसॉल्व, सेलोसॉल्व ऐसीटेट, जाइलीन, बेन्जीन, टॉलूईन, ऐसीटोन, मेथिल तथा एथिल ग्लाइकॉल ऐसीटेट, मोनोक्लोरोबेन्जीन, आइसोप्रोपैनॉल, ट्राइक्लोरोएथिलीन आदि।

नेगेटिव-कार्यकारी गीली-फिल्म फोटोरेजिस्ट के लिए संसाधन अनुक्रम तालिका 1 में दिखाया गया है।

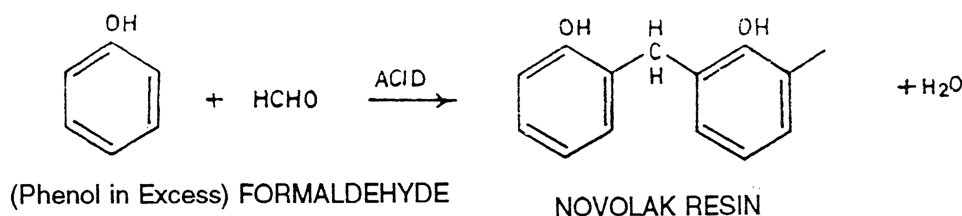
पॉजिटिव-कार्यकारी फोटोरेजिस्ट

पॉजिटिव-कार्यकारी गीली-फिल्म फोटोरेजिस्ट, नेगेटिव रेजिस्ट की तुलना में बिल्कुल अलग होते हैं [47]। इनमें ऐक्टिनिक प्रकाश की अनुक्रिया तथा परिणीत प्रतिबिम्ब भिन्न होते हैं, यद्यपि आवश्यक अवयव समान होते हैं। दोनों में रेजिन, सुग्राहक और संयोजक एक विलायक पद्धति में घुले होते हैं किन्तु पाजिटिव फोटोरेजिस्ट में इन घटकों में से कुछ की प्रकृति व प्रकार्य, नेगेटिव रेजिस्ट में अपने प्रतिरूपों से काफी भिन्न होते हैं। पाजिटिव रेजिस्ट को मंद भारीय घोल में डेवेलप किया जाता है। सामान्य रासायनिक प्रतिरोध नेगेटिव रेजिस्ट की तुलना में कम होता है, परन्तु पाजिटिव रेजिस्ट से बने प्रतिबिम्ब अत्यन्त परिशुद्ध होते हैं, कम संसाधन तकनीक की आवश्यकता होती है और थोड़े प्रक्रम पद होते हैं।

पॉजिटिव रेजिस्ट में रेजिन, नेगेटिव रेजिस्ट से भिन्न नियमानुसार प्रकाशसुग्राही नहीं होते हैं लेकिन इनमें कुछ अन्य गुण होते हैं [48]। इनमें रासायनिक असंतृप्तिकरण नहीं होता है तथा वास्तव में एक्स्पोजर के दौरान ये सुग्राहक से क्रिया नहीं करते हैं। उत्तम जलीय डेवेलपमेन्ट गुण सुनिश्चित करने के लिए कम अणुभार के रेजिन सामान्यतः इस्तेमाल में लाये जाते हैं। रेजिन में निम्नलिखित गुण होने चाहिए : ये विलेपन सम्मिश्रण के आसंजन को बढ़ाते हैं, उत्तम रासायनिक प्रतिरोध के लिए विलेपन को मजबूत करते हैं, विलेपन के समय सुग्राहक के क्रिस्टलन की प्रवृत्ति को कम करते हैं, श्यानता और विलेपन अभिलक्षणों को बढ़ाते हैं। ये अति जलभीत नहीं होते हैं, क्षारीय विलयन में घुलनशील परन्तु अम्लों के प्रति विरोधी होते हैं। पाजिटिव रेजिस्ट में रेजिन विशेष रूप से सुग्राहकों के साथ युग्मन अभिक्रियाएँ करने की क्षमता रखते हैं।

अब तक पॉजिटिव रेजिस्ट रचकों में जिन रेजिन की बहुत अधिक चर्चा है, वे लाल रंग के फीनॉल फॉर्मेल्डीहाइड नोवोलैक तथा संबन्धित अवकलज हैं[49]। नोवोलैक रैखिक तथा स्थायी रूप से संगलनीय हो सकते हैं और क्रॉस-बन्धन पॉलीमर नहीं बनाते हैं। चित्र-8 में फीनॉल व फॉर्मेल्डीहाइड

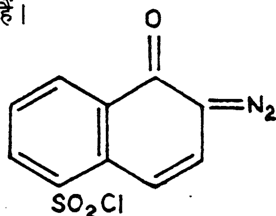
के बहुलकीकरण से फीनॉल फॉर्मेल्डीहाइड नोवोलैक रेजिन का बनना दिखाया गया है। फीनॉल का अवकलज मेटाक्रीसॉल अधिक क्रियाशील होता है और नोवोलैक रेजिन बनाने के लिए अधिकतर इस्तेमाल में लाया जाता है। मेटाक्रीसॉल फॉर्मेल्डीहाइड नोवोलैक रेजिन फीनॉल फॉर्मेल्डीहाइड रेजिन की तुलना में अधिक आर्द्रता-प्रतिरोधी होते हैं तथा पाजिटिव फोटोरेजिस्ट सम्मिश्रणों में इनका इस्तेमाल अधिक होता है। पॉलिविनाइल ईथर, स्टाइरीन, मेथिल स्टाइरीन, स्टाइरीन-मैलेइक ऐनहाइड्राइड कोपॉलीमर और मेलऐमीन रेजिन नोवोलैक के साथ पाजिटिव फोटोरेजिस्ट बनाने के लिए प्रयोग किये जाते हैं। नोवोलैक रेजिन में योज्य, विलेपन की उपयोग क्षमता और धातु सतहों पर आसंजन को बढ़ाते हैं, साथ ही हल्के क्षारीय विलयनों के साथ अभिक्रिया के दौरान रासायनिक प्रतिरोध में भी सुधार लाते हैं।



(Phenol in Excess) FORMALDEHYDE NOVOLAK RESIN

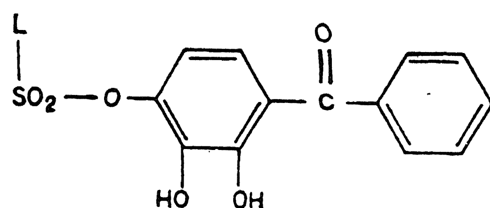
चित्र–8. फीनॉल फॉर्मेल्डीहाइड नोवोलैक रेजिन का बनना

पाजिटिव फोटोरेजिस्ट में अधिकतर सुग्राहक डाइऐजो ऑक्साइड या आर्थोक्वीनोन डाइऐजाइड यौगिकों के अवकलज होते हैं[50]। पेटेंटों के अध्ययन से पता चलता है[51-53] कि व्यापक रूप से प्रयोग होने वाला फोटोसुग्राहक 1, 2 नैफ्थोक्वीनोन-2- डाइएजिडो-5-सल्फोनाइल क्लोराइड है (चित्र-9)। ये एक या अधिक प्रकाशसुग्राही अवयव एस्टर या ऐमाइड बन्धन के द्वारा एक केन्द्रीय संरचना से जुड़े रहते हैं (चित्र 10)। केन्द्रीय ग्रुप, जो स्वयं प्रकाशसुग्राही नहीं हो सकता है, रेजिस्ट के सम्पूर्ण गुणों को प्रभावित करता है। उदाहरणतः, विभिन्न विलयनों में सुग्राहक की घुलनशीलता केन्द्रीय सरंचना के घटकों द्वारा कुछ हद तक नियंत्रित की जा सकती है। फिल्म बनाने की योग्यता, क्रिस्लन प्रवृत्ति, तथा डेवेलपमेन्ट में सरलता भी सुग्राहक के केन्द्रीय ग्रुप से बहुत अधिक प्रभावित होते हैं। ये यौगिक सामान्यतः पीले रंग के, स्थायी, अपघटन के लिये प्रतिरोधी, कम ध्रुवता के विलयनों में घुलनशील और जल में अघुलनशील होते हैं।



1, 2–Naphtoquinone–2–diazido1–5–sulphonyl chloride

चित्र–9. पाजिटिव रेजिस्ट प्रकाश-सुग्राही अवयव

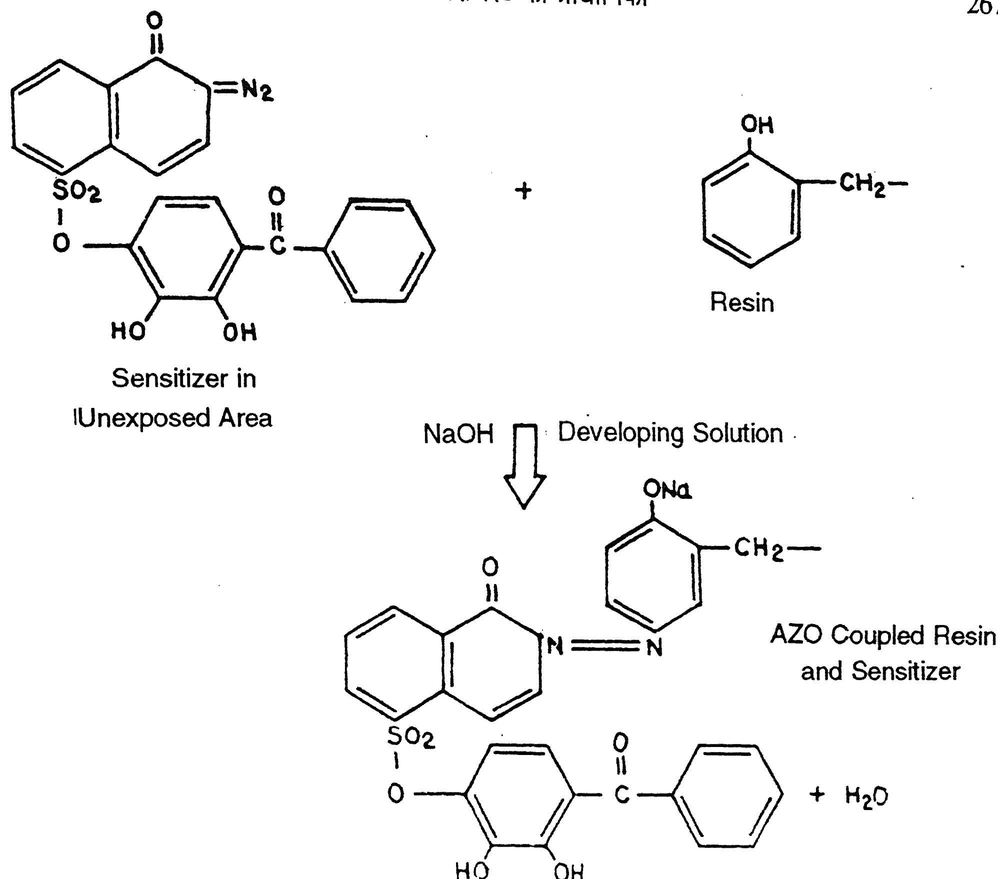


चित्र–10. पाजिटिव रेजिस्ट पद्धति में प्रकाश-सुग्राही अवयव (L) के साथ सुग्राहक का केन्द्रीय ग्रूप

O
=N2
Light Energy
=C=O
+ N2
R
Light Sensitive Element
R
Ketene

O
=N2
+
C=O
R
R
Unreacted Light Sensitive Element
R
O
C=O
N2 +
R
LACTONE
Developing
NaOH
R
OH
COONa
R

चित्र–11. पाजिटिव रेजिस्ट के एक्स्पोजर के दौरान लीवाइन द्वारा सुझाई गई अभिक्रियाएँ



चित्र–12. बिना एक्स्पोज हुए क्षेत्रों में रेजिन के साथ सुग्राहक अणु की युग्मनअभिक्रिया

पाजिटिव रेजिस्ट में सुग्राहक अवशोषित विकिरणों से क्रिया कर यद्यपि रेजिन को बहुलकित नहीं करते हैं लेकिन विलेपन की घुलनशीलता को विलायक-विलेय से जल-विलेय में परिवर्तित कर देते हैं। प्रकाश से अभिक्रिया करके, प्रकाश-सुग्राही घटक, क्वीनोन डाइएजाइड में बहुत अधिक भौतिक परिवर्तन होता है; 1969 में अमेरिका के एच० ए० लीवाइन ने सुझाया[54] कि इसमें नाइट्रोजन और ऑक्सीजन से युक्त वलीय संरचना के पुनर्विन्यास द्वारा एक नया अत्यन्त अभिक्रियाशील यौगिक "कीटीन" बनता है तथा नाइट्रोजन निकलती है (चित्र 11)। कीटीन फिर बिना एक्स्पोज हुए सुग्राहक अणुओं से क्रिया कर लैक्टोन बनाता है। डेवेलपमेन्ट के दौरान, लैक्टोन वलय टूट जाता है और कार्बोक्सिलिक एसिड लवण बनता है।

नेगेटिव रेजिस्ट से भिन्न, प्रतिबिम्ब (बिना एक्स्पोज का) क्षेत्र में "युग्मन" रासायनिक अभिक्रिया हो सकती है जिसमें डाइएजाइड, कुछ अन्य यौगिकों विशेषतः फीनॉल तथा ऐरोमैटिक ऐमीन के साथ ऐजो बन्धन के समान संयुक्त होता है। चित्र 12 में दिखाया गया युग्मन क्षारीय डेवेलपमेन्ट घोल में

तत्काल होता है जो एक्स्पोज हुए अवशिष्टों को भी दूर कर देता है। युग्मन फीनॉल या ऐमीन से युक्त क्षारीय-विलेय रेजिन यथा फीनॉल फॉर्मेल्डिहाइड रेजिन के लिए डेवेलपमेन्ट के दौरान निक्षालन प्रवृत्ति को कम करती है।

पाजिटिव फोटोरेजिस्ट में एक महत्वपूर्ण समस्या उनका अस्थायित्व है और डाइऐजो यौगिकों के लिए अनेक स्थायीकारक संयोजक प्रयोग में लाये जाते हैं[55]। पाजिटिव रेजिस्ट संघटकों में स्थायीकारक जैसे थायोयूरिया, शर्करा, कार्बनिक अम्ल, रंजक, रेजिन प्लास्टिसाइजर और अन्य संबन्धित यौगिक संयोजकों के समान इस्तेमाल में लाये जा सकते हैं।

पाजिटिव रेजिस्ट में विलायकों की मात्रा व प्रकार एकसमान विलेपन बनाने में महत्वपूर्ण भूमिका अदा करते हैं और कदाचित विलायकों का मिश्रण प्रयोग में लाया जाता है। नेगेटिव रेजिस्ट से भिन्न, इनमें सुग्राहक की मात्रा काफी अधिक होती है और घोल से इसका क्रिस्टलीकरण विद्यमान रेजिन की मात्रा या प्रकार के साथ असंगतता अथवा घोल में अपेक्षाकृत अधिक मात्रा के कारण हो सकता है। इसलिए पाजिटिव रेजिस्ट में विलायकों का चयन सावधानीपूर्वक किया जाना चाहिए। पेटेन्ट साहित्य से पता चलता है[56] कि पाजिटिव रेजिस्ट में सामान्यतः निम्नलिखित विलायक प्रयोग में लाये जाते हैं : सेलोसॉल्व, मेथिल सेलोसॉल्व, सेलोसॉल्व ऐसीटेट, ब्यूटिल ऐसीटेट, ज़ाइलीन, डाइऑक्सेन आदि।

पाजिटिव-कार्यकारी गीली-फिल्म फोटोरेजिस्ट के लिए मूल संसाधन विधि नेगेटिव फिल्म रेजिस्ट के समान ही है।

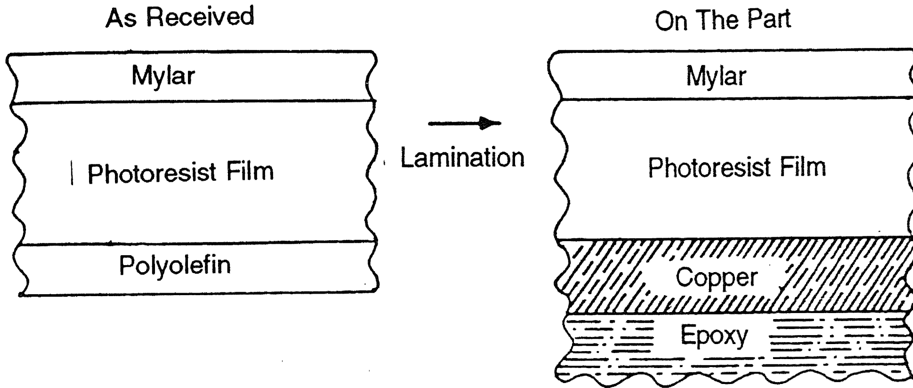
सूखी-फिल्म फोटोरेजिस्ट

गीली-फिल्म रेजिस्ट की तुलना में सूखी-फिल्म फोटोरेजिस्ट अधिक लाभदायक होते हैं[57]। गीली-फिल्म रेजिस्ट में जो विलेपन विषमताएँ हो सकती हैं, वे इसमें वस्तुतः नहीं होती हैं और संसाधन अनुक्रम पदों और समय दोनों के अनुसार बहुत कम होते हैं। सभी प्रकार की सूखी-फिल्म रेजिस्टों में प्रयोग में लाये जा रहे सूखी-फिल्म फोटोरेजिस्ट संघटक चित्र 13 में दिखाये गये हैं जो स्वतः स्पष्ट हैं[58]।

सूखी-फिल्म रेजिस्ट मूलतः तीन प्रकार के होते हैं और इन्हें डेवेलपमेन्ट में इनके व्यवहार के अनुसार वर्गों में बाँटा जा सकता है[59]। (अ) टाइप-ए; विलायक-डेवेलपिंग रेजिस्ट (ब) टाइप-बी; जलीय-डेवेलपिंग रेजिस्ट, तथा (स) टाइप-सी; विशल्कन-पृथक रेजिस्ट। वर्ग-ए तथा बी रेजिस्ट नेगेटिव प्रतिबिम्ब बनाते हैं और साधारण तरीके से संसाधित किये जाते हैं। वर्ग-सी रेजिस्ट की संसाधित तकनीक विलक्षण है तथा पाजिटिव प्रतिबिम्ब बनाती है। इसमें द्रव डेवेलपमेन्ट नहीं होता है।

सूखी-फिल्म रेजिस्ट में टाइप-ए प्रकार के रेजिस्ट सबसे अधिक इस्तेमाल में लाये जाते हैं। ये 20° सेल्सियस ताप पर मेथिल क्लोरोफॉर्म में डेवेलप किये जाते हैं। 1969 में अमेरिका की डू पौन्ट कम्पनी के जी० आर० सीलेस्ट ने अपने पेटेन्ट में बताया[60] है कि इस वर्ग में सार रूप से दो प्रकार के रेजिस्ट होते हैं। पहले प्रकार के रेजिस्ट में निम्नलिखित घटक होते हैं : प्रकाशसुग्राही रेजिन, अक्रिय

पूरक (अप्रकाश सुग्राहक) रेजिन, सुग्राहक (प्रकाश प्रारंभक), शृंखला अन्तरणकारक तापीय बहुलकीकरण नियंत्रक, रंजक तथा प्लास्टिसाइजर। एक्स्पोजर के दौरान रेखिकपॉलीमर, एस्टरीकृत ऐक्राइलिक कार्यात्मक ग्रूप के मध्य अभिक्रिया के द्वारा बहुत अधिक अणु भार के नेटवर्क में लम्बी शृंखला के क्रॉस-बन्धन द्वारा अघुलनशील हो जाते हैं। इस संबन्ध में ये नेगेटिव रेजिस्ट में प्रयोग में लाये जा रहे पॉलिविनायल सिनामेट रेजिन के अनुरूप हैं। दूसरे प्रकार के रेजिस्ट में असुग्राहक योजक रेजिन, बहुलकीकरण नियंत्रक (मोनोमर के लिए), सुग्राहक और रंजक का मिश्रण होता है। एक्स्पोजर से पहले एकलक आवश्यक लचीलापन और फिल्म कठोरता प्रदान करने के लिए प्लास्टिसाइजर की तरह कार्य करता है। एक्स्पोजर के बाद मोनोमर अति परस्पर सम्बद्ध त्रिविम नेटवर्क पॉलीमर बनाता है।



चित्र–13. सूखी–फिल्म फोटोरेजिस्ट का संघटन

टाइप-बी प्रकार के रेजिस्ट जलीय अथवा आंशिक जलीय विलयनों में डेवेलप किये जाते हैं। सीलेस्ट के अनुसार[61] इन रेजिस्टों में मुख्य घटक रेजिन, एकलक, बहुलकीकरण नियंत्रक, सुग्राहक तथा रंजक होते हैं। रेजिन में एसिड ग्रुप होते हैं जो मुक्त क्षारीय आयन से क्रिया कर लवण बनाते हैं। यदि पॉलीमर शृंखला में जलभीत अवयवों के प्रभाव को कम करने के लिए क्रियाशील ग्रुप की संख्या काफी होती है तो यह रेजिन को जल-विलेय पदार्थ में परिवर्तित कर देता है। अम्लीय और जलभीत ग्रुप का अनुपात काफी हद तक सुकारित डेवेलपमेन्ट तथा साथ ही क्षारीय प्रतिरोधकता को प्रभावित करता है। एकलकों की जलभीत प्रवृत्ति व सांद्रता भिन्न होती है। ये डेवेलपमेन्ट समय को प्रभावित करते हैं।

विलायक तथा जल-डेवेलपिंग रेजिस्ट (वर्ग-ए तथा बी), दोनों के मूल संसाधित अनुक्रम समान होते हैं। इस अनुक्रम में निम्नलिखित चरण होते हैं : अवस्तर बनाना व सफाई, लैमिनेटर की सहायता से सूखी-फिल्म फोटोरेजिस्ट को अवस्तर पर लगाना, एक्स्पोजर, डेवेलपमेन्ट, टच-अप, बेकिंग और रेजिस्ट का कार्य सम्पन्न होने के बाद फोटोरेजिस्ट को हटाना।

1968 में अमेरिका के ए० सी० शोएनथैलर ने अपने पेटेन्ट में विशल्कन-पृथक रेजिस्ट के संघटकों की जानकारी दी[62]। इस रेजिस्ट में फोटोपॉलीमर, पूरक रेजिन, ट्राइएथिलिन ग्लाइकॉल डाइऐसीटेट, क्वीनोन सुग्राहक और तापीय बहुलकीकरण नियंत्रक होते हैं।

टाइप-सी रेजिस्ट का प्रचालन सिद्धान्त अनूठा है। रेजिस्ट रेजिन के साथ जब प्रकाश क्रिया करता है तो इसका बहुलकीकरण होता है और निर्मल-प्लास्टिक माइलर उपरिस्तर पर आसंजन बढ़ जाता है। एक्स्पोज रेजिन में अणुभार बढ़ने के कारण भौतिक गुणों में परिवर्तन होता है। बिना एक्स्पोज हुए क्षेत्रों में, रेजिन में वास्तव में कोई परिवर्तन नहीं होता है। एक्स्पोजर के बाद उपरिस्तर अपने स्थान पर रहने के साथ, अवयवों का तापीय डेवेलपमेन्ट किया जाता है। आरम्भ में घटक को गर्म किया जाता है। तापन द्वारा बिना एक्स्पोज हुए क्षेत्र तरल हो जाते हैं लेकिन बहुलकीकृत एक्स्पोज क्षेत्रों पर असर नहीं होता है। गर्म रहने पर, निर्मल-प्लास्टिक उपरिस्तर को अवयव से छील कर अलग कर दिया जाता है। बहुलकीकरण द्वारा माइलर पदार्थ के आसंजन के कारण, एक्स्पोज प्रतिबिम्ब, धातु सतह से अपगामी प्लास्टिक उपरिस्तर द्वारा खींच लिया जाता है। बिना एक्स्पोज हुए क्षेत्रों में, ताप-मृदुकारी बिना बहुलकीकरण हुए रेजिन में विशल्कन बल लगाये जाने से संसंजक विफलता होती है। लगभग आधा रेजिन माइलर उपरिस्तर के साथ लगा रहता है और एक्स्पोज प्रतिबिम्ब के साथ खींच लिया जाता है। निचला आधा भाग धातु सबस्ट्रेट के साथ लगा रहता है और प्रतिबिम्ब बनाता है। चूँकि बिना एक्स्पोज हुआ रेजिन अवस्तर पर रहता है, इसलिए प्रतिबिम्ब पाजिटिव होता है। प्रतिबिम्ब रेखाकृति एक्स्पोज प्रतिबिम्ब के फटने से कुछ विकृत हो जाती है परन्तु अनेक उपयोगों में इसका इस्तेमाल किया जा सकता है[63]। यदि एक्स्पोज न हो तो प्रतिबिम्ब बिना बहुलकीकृत हुए रहता है और आसानी से दूर किया जा सकता है। अधिक टिकाऊपन के लिए प्रतिबिम्ब को एक्स्पोज किया जाता है।

उपयोग

प्रकाश-सुग्राही रेजिस्टों का इस्तेमाल इस प्रकार के उपयोगों जैसे अंतरिक्ष के अवयवों के भार में कमी, विमीय स्पेक्ट्रम से लेकर बहुत परिशुद्ध व जटिल माइक्रोइलेक्ट्रॉनिक युक्तियों में होता है[64]। आजकल समस्त सेमीकन्डक्टर उद्योग अपनी पद्धतियों, युक्तियों और सर्किटों के निर्माण में फोटोरेजिस्ट के प्रयोग पर निर्भर हैं[65]। इलेक्ट्रॉनिक्स में फोटोरेजिस्ट का प्रयोग प्रिन्टेड सर्किट बोर्ड बनाने के लिए किया जाता है[66]– जैसे दृढ़ लचीले तथा बहु-परत बोर्ड, स्थूल -फिल्म सर्किट, तनु-फिल्म सर्किट, हाइब्रिड सर्किट इंटीग्रेटेड सर्किट, धातु-ऑक्साइड सेमीकन्डक्टर इंटीग्रेटेड सर्किट, बहुत अधिक स्केल इंटीग्रेटेड सर्किट आदि। रक्षा तथा अंतरिक्ष से लेकर दूरसंचार और कम्प्यूटर के महत्वपूर्ण उपयोगी क्षेत्रों में व्यवसायी कोटि के प्रिंटेड सर्किट बोर्ड की माँग दिन-प्रतिदिन बढ़ती ही जा रही है।[67]।

यह बेखटके कहा जा सकता है कि आज विश्व में लगभग जितने भी इलेक्टॉनिक उपकरणों का निर्माण हो रहा है, उनके संविरचन के अनुक्रम में फोटोरेजिस्ट महत्वपूर्ण भूमिका अदा करते हैं और पिछले पाँच दशकों में इलेक्ट्रॉनिक उद्योग के असाधारण विकास और विस्तार का प्रमुख श्रेय सबस्ट्रेट

पर रासायनिक प्रतिरोधक प्रतिबिम्ब को यथार्थ रूप से पुनरुत्पादन के लिए रेजिस्ट की विलक्षण योग्यता को दिया जा सकता है[69, 70] : फोटोसंविरचन, फोटोएचिंग, इलेक्ट्रोप्लेटिंग, इलेक्ट्रोफॉर्मिंग, फोटो-इलेक्ट्रोफॉर्मिगं, फोटोलिथोग्राफी[71], माइक्रोलिथोग्राफी, माइक्रोमशीनिंग[72], फोटोरासायनिक व वैद्युत फोटो-रासायनिक मशीनिंग, रासायनिक खंचित धातु के अवयव, नाम की प्लेटें, ग्रैटिक्यूल, ग्रिड, स्केल तथा रुलर्स, अलंकारी डिजाइन, होलोग्राफिक रिकॉर्डिंग, प्रिंटिंग उद्योग में उपयोग[74] यथा लिथो प्लेट, ग्रैव्योर प्रिंटिंग सिलिंडर, लेटर प्रेस प्लेट, स्क्रीन प्रोसेस प्रिंटिंग, फोटोएंग्रेविंग, कोलोटाइप प्रिंटिंग, प्रूफिंग पद्धति और विभिन्न क्षेत्रों में अन्य उपयोग[75]।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक यंत्र अनुसंधान एवं विकास संस्थान, देहरादून के निदेशक के प्रति आभार प्रगट करता है जिन्होंने इस समीक्षा लेख के दौरान प्रोत्साहन प्रदान किया तथा गहरी रुचि दर्शाई।

निर्देश

1. डेलेजेन, जी. ए., : Photoresists in Encyclopaedia of Polymer Science and Technoloty, Suppl. 1, इन्टरसाइन्स, न्यूयॉर्क, 1976

2. कोसार, जे., : Light Sensitive Systems, जॉन विली एण्ड सन्स, इन्क., न्यूयॉर्क, 1965, पृष्ठ 143.

3. क्लार्क, के. जी., : In Non-Silver Photographic Processes (कौक्स, आर. जे., सम्पादक), अकादमी प्रेस, लंदन, 1975, पृष्ठ 249.

4. हेफर, एम., : जर्न. फोटो. साइन्स, 1964,12, 181.

5. ऑस्टर, जी. तथा यांग, एन०, : कैमि. रिव्यू, 1668, 68, 125.

6. बर्डेन, जे. डब्ल्यू, : Graphic Reproduction Photography, फोकल प्रेस, लंदन, 1980, पृष्ठ 11.

7. जॉजेनसेन, जी डब्ल्य. तथा ब्रूनो, एम. एच., : The Sensitivity of Bichromated Coatings, लिथोग्राफिक टेक. फाउंडेशन, न्यूयॉर्क, 1954, पृष्ठ 1.

8. जर्नशीम, एच., : A Concise History of Photography, टेम्स एण्ड हडसन, लंदन, 1971, पृष्ठ19.

9. वाकर, पी. वीबर्स, वी. जे. तथा टॉम्स, जी. ए., : जर्न. फोटो. साइन्स, 1970, 18, 150.

10. ब्राउन, सी. ए., : यू. एस. पेटेन्ट,1956(2), 742, 358.

11. आइसलर, पी., : The Technology of Printed Circuits, हेवुड एण्ड कम्पनी, लिमिटेड, लंदन, 1959, पृष्ठ 103.

12. वुड्स, बी., : Trans. Inst. Metal Finish., Printed Circuit Suppl., 1968, पृष्ठ 131.

13. बौमैन, एन. नैक्र. कैम. टेक., 1974, 22, 477.

14. मिन्स्क, एल. एम, : यू. एस. पेटेन्ट 1955(2), 725, 372.

15. लीवाइन, एच. ए., लीसोइन, एल. जी. तथा ऑफेनबैस, जे. ए., : Kodak Photoresist Semin. Proc., 1968.

16. शिप्ले, सी. आर., जूनियर, : यू. एस. पेटेन्ट 3, 011, 920 (1961)

17. ग्लाफकाइड्स, पी. : Photographic Chemistry, फाउंटेन प्रेस, लंदन, 1960, पृष्ठ 676.

18. कौक्स, आर. एस. तथा होवर्ड, एच.ल., : प्रोसेस इन्जी. मॉन., 1959, 66, 10.

19. How to Bond to Copper While Metallizing Plastics, : शिप्ले कम्पनी, डेटा शीट, जी. एस-12 ए, जनवरी, 1960.

20. डाइनाकैम कौरपोरेशन, सान्ता फे स्प्रिग्सं, कैलिफोर्निया, यू. एस. ए., टेक्निकल डेटा बुलेटिन

21. पी. ए. हन्ट कौरपोरेशन, पालिसाडेस पार्क, न्यू जर्सी, यू. एस. ए., टेक्निकल डेटा बुलेटिन

22. जी. ए. एफ. कम्पनी, न्यूयॉर्क सिटी, न्यूयॉर्क, टेक्निकल डेटा बुलेटिन

23. ई. आई. डू पौन्ट डी नीमौर्स एण्ड कम्पनी, विल्मिंगटन डेल, यू. एस. ए., टेक्निकल डेटा बुलेटिन

24. ईस्टमैन कोडक कम्पनी, रौचेस्टर, न्यूयॉर्क, यू. एस. ए., टेक्निकल डेटा बुलेटिन

25. शिप्ले कम्पनी, न्यूटन, मैसाचूसेट्स, यू. एस. ए., टेक्निकल डेया बुलेटिन

26. मैक डरमिड इमेजिंग टेकनोलॉजी, वाटरबरी, सी. टी, यू. एस. ए., टेक्निकल डेटा बुलेटिन

27. लॉरेन्ज, एच., डेसपौन्ट, एम., ला बिआन्का, एन. सी., रीनौड, पी. तथा वेटलाइजर, पी., : जर्न माइक्रोमैक. माइक्रोइन्जी, 1997, 7, 121.

28. मैक, सी. ए. : ऐप्लाइड आप्टि. 1988, 27, 4913.

29. वुडवर्ड, डी. डब्ल्यू, चैम्बर्स, जे. सी. तथा कोहेन, ए. बी., : फोटो. साइन्स इन्जी., 1963, 7, 360.

30. ओ., ब्रायन, बी., जर्न. आप्टि. सोसाइटी अमे., 1952, 42, 101.

31. जेम्स, टी. एच. तथा हिजीन्स, जी. सी., : Fundamentals of Photographic Theory, मौर्गन एन्ड मौर्गन, इन्क., न्यूयॉर्क, 1960, पृष्ठ 164.

32. बुलऑक, जे. जे., : पॉलिमर इन्जी. साइन्स, 1971, 11, 405.

33. डेलजेन, जी., : इन्ड. चिम. बेल्ज, 1974, 39, 249.

34. राबेक, जे. एफ., : फोटोमैक. एण्ड फोटोबायो., 1968, 7, 5.

35. ब्रिन्कमैन, ई., डाइजेन, जी., पूट, ए. तथा विलेम्स, जे., : Unconventional Imaging Processes, द फोकल प्रेस, लंदन, 1978.

36. सहाउन, एम. आर. वी., : जर्न. केमि. एजुकेशन, 1973, 50, 88.

37. स्टॉबैक, एच., : फोटो-टेक्निक एण्ड वर्टशाफ्ट 1966, 4, 132.

38. मिलर, एल. जे., : मारजोरम, जे. डी. तथा रस्ट, जे. बी., जर्न. सोसाइटी मोशन पिक्चर टेलीविजन इन्जी., 1968, 77, 1177.

39. मिन्स्क, एल. एम., वैन डियूसेन, डब्ल्यू. पी. तथा राबर्टसन, ई. एम., : यू. एस. पेटेन्ट 2, 610, 120 (1952).

40. मिन्स्क, एल. एम., वैन डियूसेन, डब्ल्यू. पी तथा राबर्टसन ई. एम., : यू. एस. पेटेन्ट 2, 670, 285, (1954).

41. मिन्स्क, एल. एम., वैन डियूसेन, डब्ल्यू. पी. तथा राबर्टसन, ई. एम., : यू. एस. पेटेन्ट 2, 670, 286, (1954).

42. मिन्स्क, एल. एम., वैन डियूसेन, डब्ल्यू. पी. तथा राबर्टसन, ई. एम. : पेटेन्ट 2, 670, 287 (1954).

43. बारजाइनस्काइ, एच., पेनजिन, के. तथा वोल्कर्ट, ओ., : कैमिकर-जेटुन्ग, 1972, 96, 545.

44. डेलजेन, जी. : यूरोपिएन पालिमर जर्न. सप्लि., 1969, 55.

45. रॉनर, एफ. जे. तथा मार्टिन्सन, एल. ई., : फ्रेन्च पेटेन्ट 1, 528, 496 (1968).

46. जिलानो, एम. एन., मार्टिन्सन, आई. डब्ल्यू. तथा ऑट, एल. एच., : यू. एस. पेटेन्ट 3, 376, 139 (1968).

47. डिल, एफ. एच., होमवर्ग्र, डब्ल्यू. पी., हेज, पी. एस., तथा शॉ, जे. एम. आई. ई. ई. ई. ट्रान्स. इलेक्ट्रॉन डिवाइसेस, 1975, 22, 445.

48. हैनसन, पी. पी., : फोटो. साइन्स इन्जी., 1970, 14, 438.

49. डनहैम, के. आर., बोरडेन, डी. जी., फील्ड्स, डी. एल. तथा ब्लेअर, जे., : यू. एस. पेटेन्ट 3, 567, 453 (1970).

50. सैनो, आर. तथा हासेगावा, के., : फोटो. साइन्स इन्जी., 1971, 15, 309.

51. स्टाइनहॉफ, टी. एल., शिप्ले, सी. आर. तथा मैकडोनाल्ड, जे. ए., : कैनाडिअन पेटेन्ट 774, 047 (1967).

52. काले कम्पनी ए. जी., : ब्रिटिश पेटेन्ट 1, 127, 996 (1968).

53. शिमिड, एम. पी., : यू. एस. पेटेन्ट 3, 046, 118 (1962).

54. लीवाइन, एच. ए., : Polymer Preprints, Division of Polymer Chemistry, ए सी एस, 1969

55. क्राइस्टेनसेन, सी. डब्ल्यू., : फ्रेंच पेटेन्ट, 1, 542, 334 (1968).

56. एन्डरमैन, एफ., निउजेबॉर, डब्ल्यू. तथा राइशेल, एम. के., : यू. एस. पेटेन्ट 3, 148, 983 (1964).

57. जेकबसन, के. आई. तथा जेकबसन, आर. ई., : Imaging Systems, द फोकस प्रेस, लंदन, 1976, पृष्ठ 211.

58. डीसौउर, आर., : S P S E Seminar, Novel Imaging Systems, 1969, पृष्ठ 79

59. वाकर, पी., S P S E Hand Book of Photographic Science & Engineering (टॉम्स, डब्ल्यू, जूनियर, सम्पादक), जॉन विली एण्ड सन्स न्यूयॉर्क, 1973, पृष्ठ 372.

60. सीलेस्ट, जे. आर., यू. एस. पेटेन्ट 3, 469, 982 (1969).

61. सीलेस्ट, जे. आर., यू. एस. पेटेन्ट 3, 448, 295 (1969).

62. शौएनथैलर, ए. सी., यू. एस. पेटेन्ट 3, 418, 295 (1968).

63. डेलजेन जी. ए., : Scope and Limitations of organic Photochemical Systems, 4 e Intern Kongress fur Reprographic and Information, हैनोवर, जर्मनी, 1975, पृष्ठ 99

64. शॉ, जे. एम., जेलोर्म, जे. डी., ला बिआंका, एन. सी., कॉन्ली, डब्ल्यू. ई. तथा होम्स, एस. जे., आई बी एम जर्न. रिसर्च डेवेलप., 1997, 41, 81

65. खालिद, एल. ए., चार्ल्स, डी. एस. तथा टॉम्स, के., आई ई ई ई ट्रान्स. सेमीकन्डक्टर मैन्यू., 1999, 12, 264.

66. बौशार्ट, डब्ल्यू. सी., : Printed Circuit Boards : Design and Technology, टाटा मैकग्रा-हिल, नई दिल्ली, 1984.

67. कूम्ब्स, सी. एफ., यूनियर, : Printed Circuits Hand Book, मैक ग्रा-हिट बुक कम्पनी, न्यूयॉर्क, 1979.

68. ला बिआंका, एन. सी. तथा जेलोर्म, जे. डी., एस पी आई ई, 1995, 2438, 846

69. माइक्रोरेजिस्ट टेक्नोलॉजी, जी. एम. बी. एच., बर्लिन, जर्मनी, टेक्निकल डेटा बुलेटिन

70. स्टीवेन्स, जी. डब्ल्यू., : Microphotography, Photography and Photofabrication at Extreme Resolutions, चैपमैन एण्ड हॉल, लंदन, 1968

71. चैंग, वाई., लिन सी.-वाई. वी. डी. एच., लोएशेल, बी तथा ग्रूएट्ज़र, जी. आई ई ई ई जर्न. माइक्रोइलेक्ट्रोमैक. सिस्टम, 1996, 8, 18

72. लेविन्सन, एच. जे. तथा आरनोल्ड, डब्ल्यू. एच. : Hand Book of Microlithography, Micromachining and Microfabrication, एस. पी. आई. ई. आप्टिकल इन्जी. प्रेस, 1997

73. स्मिथ, एच. एम., : Holographic Recording Materials, स्प्रिंगर-वरलैग, बर्लिन, हाइडेलबर्ग, 977, पृष्ठ 209

74. S P S E Seminar Proceedings, Applications of Photopolymers, 1970

75. S P S E Symposiums on Unconventional Photographic Systems, Washington, 1964, 1967, तथा 1971, 3 Vols.

तालिका 1

मूलभूत नेगेटिवद्यकार्यकारी गीलीद्यफिल्म फोटोरेजिस्ट संसाधन प्रक्रम

पग	टिप्पणी
1. सबस्ट्रेट बनाना	विलायक से सफाई, अपघर्षक से घिसना, गीले ब्रुश से साफ करना, वसा-रहित करना, अम्ल में डुबोना, अन्तिम बार डुबो कर धोना, सुखाना
2. रेजिस्ट लगाना	रोलर–लेपन, डुबोना, फुहार, भ्रमिल या प्रवाह विधियों द्वारा लेपन
3. वायु में सुखाना	विलायकों को बाहर निकालना
4. प्री-बेक	विलायकों को बाहर निकालना, फिल्म हो दृढ़ करना, आसंजन में सुधार
5. एक्स्पोज	प्रतिबिम्ब निश्चित करना, आसंजन को बढ़ाना
6. डेवेलप	बिना एक्स्पोज हुए रेजिस्ट का फूलना तथा विलेयता
7. रंजन	प्रतिबिम्ब का निरूपण
8. फुहार द्वारा धोना	बिना एक्स्पोज हुए रेजिस्ट को हटाना
9. ऐल्कोहॉल में डुबोना	कुछ रेजिस्टों में सिकुड़न द्वारा प्रतिबिम्ब को स्पष्ट करना
10. फुहार द्वारा धोना	बचे हुए अवशिष्टों को दूर करना
11. हवा में सुखाना	जल को दूर करना, विलायकों को बाहर निकालना, प्रतिबिम्ब को दृढ़ करना
12. परीक्षण तथा टच–अप	प्रतिबिम्ब दोषों में संशोधन
13. पोस्टबेक	विलेपन को और दृढ़ और आसंजन में सुधार
14. निर्लेपन	रेजिस्ट का कार्य सम्पन्न होने पर इसे हटाना

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 42, No.4, October, 1999.

सीतामाता, फुलवारी एवं सज्ञनगढ़ अभयारण्यों की कंदीय वनस्पतियाँ

सतीश कुमार शर्मा

क्षेत्रीय वन अधिकारी (नाहरगढ़ जैविक उद्यान)
2, सुरेश नगर, दुर्गापुरा, जयपुर (राज०)

[प्राप्त-सितम्बर 16, 1999]

सारांश

दक्षिण राजस्थान के अन्तर्गत आमतौर पर उदयपुर, राजसमंद, चित्तौडगढ़, डूँगरपूर, बाँसवाडा तथा सिरोही जिलों को गिना जाता है। प्रस्तुत पत्र में इस क्षेत्र के सीतामाता, फुलवारी एवं सज्ञनगढ़ अभयारण्यों के कंदीय पौधों का सर्वेक्षण प्रस्तुत किया गया है। यह क्षेत्र राजस्थान के संदर्भ में अधिक वर्षा वाला क्षेत्र है। सर्वेक्षण के दौरान इस भाग में कंदीय पौधों की 25 जातियाँ पाई गई हैं।

Abstract

Tuberous plants of Sitamata, Phulwari and Sajjangarh sanctuaries. *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer (Nahargarh Biological Park), 2, Suresh Nagar, Durgapura, Jaipur (Raj.),

Generally, districts of Udaipur, Rajsamand, Chittorgarh, Dungarpur, Banswara and Sirohi are included in southern Rajasthan. A survey of tuberous plants of three sanctuaries namely-Sitamata, Phulwari and Sajjangarh of southern Rajasthan have been presented in this paper. This zone is one of high rainfall zones of the State. As many as 25 tuberous plant species have been recorded in the area.

सारणी 1 : महत्वपूर्ण वनस्पतियों का विवरण

कुल	वनस्पति का		प्रकृति	उपस्थिति विवरण		
	वैज्ञानिक का नाम	स्थानीय नाम		सीतामाता अभयारण्य	फुलवारी अभयारण्य	सज्जनगढ़ अभयारण्य
एसक्लपियेडेसी	*Ceropegia bulbosa*	गडूलिया, खडूला	लता	+	+	+
एरेसी	*Colocasia esculenta*	जंगली पेडालू	शाक	+	+	–
	Arisaema tortousum		शाक	+	+	–
	Sauromatum pedatum	जंगली सूरण	शाक	+	+	–
कुकुरबिटेसी	*Corallocarpus epigaeus*	मिर्चिया कंद, मर्स्यू, मर्सिया	लता	+	+	–
	Momordica dioca	किकोडा	लता	+	+	+
डायोस्कोरियेसी	*Dioscorea bulbosa*	गोडवेला, ग्लोदर	लता	+	+	–
	D. triphylla	गोडवेला	लता	+	+	–
	D. pantaphylla	गोडवेला	लता	+	+	–
यूफोरबियेरी	*Euphorbia fusiformis Syn. (E. aculis)*		शाक	–	+	–
फैबेसी	*Pueraria tuberosa*	मोदी, गेजवी, गेजवा	लता	+	+	–
हाइपोक्सीडेसी	*Curculigo orchioides*	काली मूसली	शाक	+	+	–
लियेसी	*Leea macrophylla*	हस्तीकर्ण, हथनी	शाक	+	+	–
लिलियेसी	*Asparagus recemosus*	शतावरी, हरैया	लतानुमा	+	+	+

लिलियेसी	*Chlorophytum laxum*	सफेद मूसली	शाक	+	+	–
	C. tuberosum	सफेद मूसली	शाक	+	+	–
	Dipcadi serotinum		शाक	+	+	–
	Gloriosa superba	खलनाकडी, पनाहोली, किलकारी	शाक	+	+	+
	Iphigenia indica		शाक	+	+	–
	Urgenia indica	कोली, कोलीकाँदा, देदी कांदा, भेडी कांदा	शाक	+	+	+
निक्टाजिनेसी	*Mirabilis Jalapa*	हाडा होगरी	शाक	+	+	–
आरकीडेसी	*Eulophia orchreata*	कूकडिया (Kukadia)	शाक	+	+	–
	Nervilia aragoana		शाक	+	–	–
जिन्जीबिरेसी	*Curcuma angustifolia*	जंगली हल्दी	शाक	+	+	–
	Costus speciosus	जंगली अदरख	शाक	+	+	–
म्यूजेसी	*Ensete superbums**	चौ, मगरा केल	शाक	–	+	–

+ प्रजाति उपस्थित, – प्रजाति अनुपस्थित या सर्वेक्षण के दौरान अज्ञात रही है।

* इसमें भूमिगत भाग छद्दा कंदीय प्रकार का होता है।

टिप्पणी—फुलवारी अभयारण्य झाडोल-कोटडा तहसील में स्थित है। यह क्षेत्र कंदीय वनस्पतियों की कृषि पैदावर के लिए राजस्थान में प्रसिद्ध है। इन हसीलों में अदरख, हल्दी, सूरण, अरबी, रतालू खूब पैदा होते हैं।

परिचय

दक्षिण राजस्थान में 600 मि० मि० से ज्यादा वार्षिक वर्षा होती है। अधिक वर्षा होने से इस क्षेत्र में वनों की सघनता अच्छी है। दक्षिण में कुम्भलगढ़, सज्ञनगढ़, फुलवारी, सीतामाता तथा माउन्ट आबू पाँच अभयारण्य अपनी विविधता हेतु विशेष महत्व रखते हैं। प्रस्तुत पत्र में उदयपुर जिले में स्थित सज्ञनगढ़ तथा फुलवारी एवं चित्तौडगढ़ जिले में स्थित सीतामाता अभयारण्यों की कंदीय वनस्पतियों का 1986 से 1995 तक किये गये सर्वेक्षण कार्य को प्रस्तुत किया गया है। मेहता[1] तथा सिंह[2] के कार्य से हालांकि दक्षिण राजस्थान के पौधों की अच्छी जानकारी मिलती है लेकिन तीनों अभयारण्यों के संदर्भ में कंदीय वनस्पतियों की सूचना हेतु यह प्रथम प्रयास है।

प्रयोगात्मक

कार्यविधि

तीनों अभयारण्यों में वहाँ के स्थानीय स्टाफ एवं जनता के लोगों, खासकर बुजुर्गों को साथ लेकर पैदल सर्वेक्षण किया गया। हालांकि गर्मी, सर्दी एवं वर्षा तीनों मौसमों में प्रेक्षण लिये परन्तु वर्षा ऋतु में सबसे ज्यादा ध्यान दिया गया क्योंकि वर्षा में सभी भूमिगत कन्द प्रस्फुटित हो आते हैं तथा प्रजातियों को पहचानना अपेक्षाकृत आसान हो जाता है।

परिणाम तथा विवेचना

सर्वेक्षण के दौरान पाई गई महत्वपूर्ण कन्दीय वनस्पतियों का विवरण सारणी 1 में दिया गया है।

केन्दीय वनस्पतियों का सर्वेक्षण क्षेत्र में नृवनस्पतीय (Ethnobotanical) महत्व

दक्षिण राजस्थान में आदिवासियों की एक बड़ी संख्या निवास करती है। आदिवासियों के जीवन में कंदीय वनस्पतियों का बड़ा महत्व है। कंदीयों के कुछ उपयोग निम्नवत् हैं :-

1. भोजन में उपयोग

(अ) कच्चा खाने में उपयोग : खडूला, मोदी, शतावरी, सफेद मूसली। मोदी के कंद मकर संक्रांति के दिन खाये जाते हैं।

(ब) पका कर (सब्जी के रूप में) : जंगली पेडालू, गोडवेला। (चित्र 1, 2 व 3)

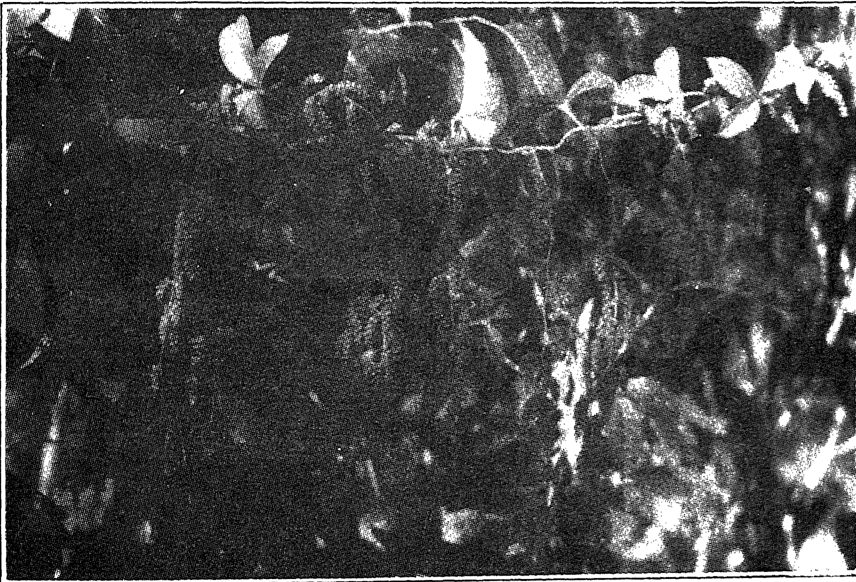
(स) विशेष तरह से उपयोग : कथोडी लोग कोली कांदा के टुकडों को काट कर बहते पानी में डाल देते हैं तथा सुबह कच्चा ही खाते हैं।

2. औषधीय उपयोग

काली मूसली, सफेद मूसली (धोली मूसली), शतावरी, कोली कांदा, जंगली हल्दी, कूकडिया, जंगली अदरख, मगरा केल देशज औषिधियों में उपयोग लिये जाते हैं। (चित्र 4 व 5)



चित्र 1 : जंगली पेडालू (*Colocasia esculenta*) सब्जी में उपयोगी कंद।



चित्र 2 : गोडवेला (*Dioscorea pentaphyly*) के भूमिगत कंद तथा 'बुलबिल्स' सब्जी में उपयोग किये जाते हैं।



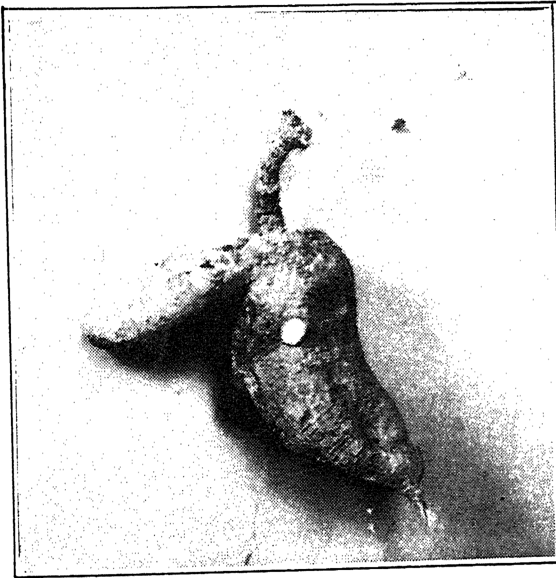
चित्र 3 : गोडवेला (*Dioscorea bulbosa*) सब्जी में उपयोगी कंद।



चित्र 4 : कूकडिया (*Eulophia orchcata*) धनुष मजबूत करने में उपयोगी।



चित्र 5 : जंगली अदरख (*Costus speciosa*) औषधियों में उपयोगी।



चित्र 6 : मिर्चिया कंद (*Corallocarpus epigaeus*) का 'वानस्पतिक बैरोमीटर' वर्षा की भविष्यवाणी में उपयोगी होता है।

3. हथियार संधारण

कूकडिया कंद को पीस कर लेई को धनुष तथा बाण पर लगाया जाता है। आदिवासियों का कहना है कि इससे उनके हथियार वर्षों तक लचीले एवं मजबूत बने रहते हैं।

4. मौसम भविष्यवाणी हेतु

मिर्चिया कंद को एक धागे से बाँध कर आदिवासी घरों में खूँटी से लटकाये रखते हैं। कंद में प्ररोह के फुटान होने से वर्षा होने का पूर्वानुमान लगाया जाता है। हर साल नया कंद लटकाया जाता है। मगराकेल के सुसुप्त पौधे से या प्रस्फुटन होने पर भी मानसून के आगमन की भविष्यवाणी की जाती है। (चित्र 6)

5. आभूषण

मिराबिलिस जलापा के बीजों में छेद कर मालाएँ बनाई जाती हैं जो हाथ व गले में पहनी जाती हैं।

दक्षिण राजस्थान में कन्दीय वनस्पतियों का भविष्य

दक्षिण राजस्थान में आदिवासी लोग बड़े पैमाने पर सफेद मूसली का दोहन करते हैं तथा कच्ची मूसली ही खोद कर बिचौलियों को सस्ती दर पर बेच देते हैं। खासतौर से कथौडी भारी दोहन करते हैं। गेजवी कंद की हालत भी दयनीय है। मकर संक्रान्ति के दिन इस कंद के खाने का रिवाज होने के कारण इसका प्रतिवर्ष सामूहिक दोहन हो जाता है। अत्यधिक पशु संख्या एवं अति चराई तथा आवास बर्बादी भी दक्षिण राजस्थान में कंदीय वनस्पतियों के लिए आघाती सिद्ध हो रहे हैं। माउंट आबू क्षेत्र में कूकडिया, सालममिश्री के नाम से बड़े पैमाने पर निकास कर बेच दिया जाता है। पिन्डवाडा, आबूरोड, माउंट आबू आदि जगहों पर आदिवासी हाटों में यह बिकता मिल जाता है। इसकी काफी मात्रा गुजरात में निकास कर दी जाती है। कुल मिलाकर कंदीय वनस्पतियों पर काफी दबाव प्रतीत होता है तथा इन्हें बचाया जाना जरूरी है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक श्री आर० जी० सोनी, अतिरिक्त प्रधान मुख्य वन संरक्षक एवं मुख्य वन संरक्षक (वन्यजीव), श्री यू० एम० सहाय, वन संरक्षक (वन्यजीव), श्री ए० सी० चौबे, वन संरक्षक, श्री मनीराम पूनिया उप मुख्य वन्य जीव प्रतिपालक, श्री आर० एस० शेखावत, उप मुख्य वन्य जीव प्रतिपालक, श्री ओ० पी० चंदेल, मण्डल वन अधिकारी एवं श्री वी० एस० राणा, सहायक वन संरक्षक का बहुत आभारी है जिन्होंने अध्ययन में हर तरह से सहयोग प्रदान किया।

निर्देश

1. मेहता एम० आर० : फ्लोरा ऑफ माउण्ट आबू, पी-एच० डी० थीसिस, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर (1983)

2. सिंह, वी० फ्लोरा ऑफ बांसवाडा, बोटेनिकल सर्वे आफ इंडिया (1983)

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. 100 or £ 12 or $ 40
Per Vol. Rs. 25 or 3£ or $ 10

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211 002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
७ बेली एवन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854 640405